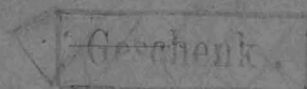


LEITFADEN
FÜR DIE
VORLESUNGEN
ÜBER
DARSTELLEND E GEOMETRIE

AN DER
HERZOG LICHEN TECHN ISCHEN HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

VON
PROF. DR. REINHOLD MÜLLER

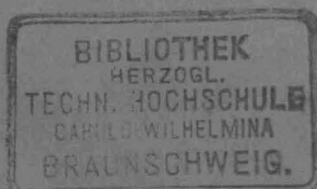
ZWEITE AUFLAGE



MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1903



August Tost
Buchbinderei
Braunschweig
Magnithor 13.

BIBLIOTHEK
HERZOG
TECHN. HOCHSCHULE
CARLO-WILHELMINA
BRAUNSCHWEIG

V. D. 12. 1. E.

LEITFADEN
FÜR DIE
VORLESUNGEN
ÜBER
DARSTELLEND E GEOMETRIE
AN DER
HERZOG LICHEN TECHN ISCHEN HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

LEITFADEN
FÜR DIE
VORLESUNGEN
ÜBER
DARSTELLEND E GEOMETRIE

AN DER
HERZOGLICHEN TECHNISCHE N HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

VON
PROF. DR. REINHOLD MÜLLER

ZWEITE AUFLAGE

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN



BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1903

Alle Rechte, namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten

VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE.

Der vorliegende Leitfaden, zu dessen Herausgabe ich mich nur auf wiederholt aus den Kreisen meiner Zuhörer geäußerte Wünsche entschlossen habe, ist ausschließlich für die Studierenden der hiesigen Hochschule bestimmt und soll auch von diesen bloß im Zusammenhange mit der Vorlesung zur Repetition des dort Gebotenen benutzt werden. Er soll hinsichtlich des Nachschreibens eine Erleichterung gewähren, ohne das für den Lernenden so wichtige Nachzeichnen der Figuren zu ersparen. Deshalb ist die Beigabe von Textfiguren möglichst vermieden worden; eine Ausnahme bilden in dieser Beziehung nur einzelne Abschnitte, die — wie z. B. die Schattenkonstruktionen bei Schraubenflächen — wegen Mangels an Zeit im Vortrage zuweilen übergangen werden, hier aber der Vollständigkeit wegen aufgenommen sind.

Der Leitfaden enthält im wesentlichen bloß den theoretischen Teil des Vortrages ohne die zahlreichen Anwendungen, die in der Vorlesung selbst eingehend berücksichtigt werden. — Für den Umfang und die Behandlung des vorgetragenen Lehrstoffes sind allein die Bedürfnisse der hiesigen Hochschule maßgebend gewesen, wie sie in Unterredungen mit den Vertretern der in Betracht kommenden technischen Wissenschaften sich herausgestellt haben. Aus diesem Gesichtspunkte erklärt sich vor allem der Verzicht auf die Heranziehung der projektiven Geometrie, die in den offiziellen Lehrplan der Hochschule nicht aufgenommen ist. Einzelne Gebiete, wie z. B. die Flächen zweiter Ordnung, sind deshalb nur flüchtig gestreift worden; sie finden ihre Ergänzung in einer besonderen Vorlesung über Geometrie der Lage, welche von denjenigen Studierenden, die eine weitergehende mathematische Ausbildung anstreben, regelmäßig im dritten Semester

gehört wird. — Die Nichtbenutzung der projektiven Geometrie bringt es mit sich, daß die Ergebnisse der Vorlesung über analytische Geometrie mehrfach verwendet werden. Der hierdurch erreichte Zeitgewinn kommt im Vortrage der gründlicheren Einübung des Lehrstoffes an Beispielen, die auch der Praxis entlehnt werden, zu gute.

Die frühzeitige Einführung der schiefen Parallelprojektion soll es dem Studierenden ermöglichen, anschauliche Skizzen von Anfang an in methodischer Weise herzustellen. In Vortrag und Übungen wird auch späterhin die schiefe Projektion neben der senkrechten in umfangreicherem Maße angewendet, als es in diesem Leitfaden zum Ausdruck gelangt.

In dem Abschnitte über Zentralprojektion glaubte ich auf die künstlerische Seite des Gegenstandes, die im Vortrage Berücksichtigung findet, der Kürze halber nicht eingehen zu sollen.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich wohl zur Genüge, daß der Leitfaden für die vorhandenen Lehrbücher der darstellenden Geometrie in keiner Weise einen Ersatz bilden soll.

Es war ursprünglich beabsichtigt, das bereits fertig gestellte Manuskript auf autographischem Wege vervielfältigen zu lassen; nur dem Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung ist es zu verdanken, daß der Leitfaden den Studierenden in einer technisch vollkommeneren Ausführung dargeboten werden kann.

Braunschweig, im August 1899.

Der Verfasser.

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich durch eine etwas ausführlichere Behandlung der Zentralprojektion.

In einigen Besprechungen ist der Wunsch geäußert worden, ich möchte den Leitfaden durch Beigabe ausgeführter Figuren auch für weitere Kreise brauchbar machen. So dankbar ich dieser verlockenden Anregung auch gegenüberstehe, so glaube ich ihr nach reiflicher Überlegung doch nicht entsprechen zu sollen, um nicht den ursprünglichen Zweck des Buches, den ich bei seiner Abfassung allein im Auge hatte, durch eine solche Vervollständigung zu beeinträchtigen. Der Leitfaden soll eben kein vollständiges Lehrbuch sein; er soll bei meinen Hörern nicht einmal den Anschein erwecken, als ob er den Besuch der Vorlesung und die beständige Mitarbeit während derselben zu ersetzen vermöchte.

Braunschweig, im Dezember 1902.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS.

| | Seite |
|----------------------|-------|
| Einleitung | 1 |

Erster Abschnitt.

Die Parallelprojektionen.

| | |
|--|----|
| I. Darstellung einfacher Raumgebilde in schiefer Parallelprojektion . | 1 |
| II. Punkt, gerade Linie und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen | 3 |
| III. Ebenflächige Gebilde | 16 |
| IV. Der Kreis | 27 |
| V. Die Kugel | 30 |
| VI. Kegel- und Zylinderflächen | 32 |
| VII. Umdrehungsflächen | 46 |
| VIII. Schraubenflächen | 56 |
| IX. Windschiefe Flächen | 66 |
| X. Grundzüge der Beleuchtungslehre | 69 |
| XI. Kotierte Projektion und topographische Flächen (Grundbegriffe) . | 72 |
| XII. Axonometrie | 73 |

Zweiter Abschnitt.

Die Zentralprojektion.

| | |
|---|----|
| I. Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene | 78 |
| II. Perspektive eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Gegenstandes | 79 |
| III. Fortsetzung der freien Perspektive: Ebene Figuren. Aufgaben über Geraden und Ebenen | 83 |
| IV. Darstellung krummer Linien und Flächen | 88 |
| V. Verlegung des Projektionszentrums | 93 |
| Anhang. Grundzüge der Reliefperspektive | 93 |

Einleitung.

Die darstellende Geometrie lehrt, räumliche Figuren in einer Ebene abzubilden und Aufgaben über dieselben auf Grundlage der Abbildung durch Zeichnung zu lösen.

Zur Herstellung solcher Abbildungen dient das Verfahren der Projektion: Um die Zentralprojektion einer gegebenen Figur zu erhalten, zieht man von einem festen Punkte (Projektionszentrum) nach allen Punkten der Originalfigur gerade Linien (projizierende Strahlen) und bestimmt ihre Schnittpunkte mit der Bild- oder Projektionsebene. Rückt das Projektionszentrum in unendliche Entfernung, werden also die projizierenden Strahlen untereinander parallel, so entsteht eine Parallelprojektion, die als senkrecht (orthogonal) oder schief bezeichnet wird, je nachdem die projizierenden Strahlen auf der Bildebene senkrecht stehen oder nicht.

An Stelle der Ebene kann unter Umständen eine krumme Fläche als Bildfläche treten; auch läßt sich das Projektionsverfahren in solcher Weise verallgemeinern, daß von den räumlichen Objekten Bilder entstehen, die selbst wieder drei Dimensionen haben (Reliefperspektive).

Erster Abschnitt.

Die Parallelprojektionen.

I. Darstellung einfacher Raumgebilde in schiefer Parallelprojektion.

1. Ist Π die Projektionsebene und l eine Gerade, welche die Richtung der projizierenden Strahlen angibt, so erhält man von irgend einem Originalpunkte P die Projektion P_s als den Schnittpunkt von Π mit der Parallelen durch P zu l .

Konstruiert man zu allen Punkten $A, B, C \dots$ einer Originalgeraden g die Projektionen $A_s, B_s, C_s \dots$, so bilden die projizierenden

Strahlen eine Ebene (die projizierende Ebene von g), und diese schneidet die Π in der Bildgeraden g_s . Die Projektion einer Geraden ist also im allgemeinen wieder eine Gerade; sie ist ein Punkt, wenn die Originalgerade die Richtung der projizierenden Strahlen hat.

Die Gerade g_s geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π (Spur oder Spurpunkt von g).

Die Abschnitte auf der Bildgeraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der Originalgeraden.

Die Projektion einer zur Bildebene parallelen Strecke ist der Originalstrecke gleich und parallel. Ist demnach eine ebene Figur zur Bildebene parallel, so sind Bild- und Originalfigur kongruent und parallel.

2. Sind die Originalgeraden AB und CD parallel, so sind auch die projizierenden Ebenen parallel. Hieraus folgt: Parallelen Originalgeraden entsprechen parallele Bildgeraden.

Zieht man $BE \parallel B_s A_s$ bis AA_s und $DF \parallel D_s C_s$ bis CC_s , so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und CDF : Die Projektionen paralleler Strecken verhalten sich wie die Originalstrecken.

3. Wenn wir in Zukunft Raumfiguren in schiefer Parallelprojektion darstellen, so wollen wir bezüglich der an sich vollkommen willkürlichen Richtung der projizierenden Strahlen ein für allemal eine bestimmte Verabredung treffen, indem wir etwa festsetzen: Diese Richtung soll immer so gewählt werden, daß die Projektion jeder auf der Zeichenebene Π senkrechten Strecke halb so groß wird wie die Originalstrecke, und mit der Breitenrichtung der Zeichenebene einen

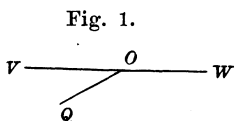


Fig. 1.

Winkel von 30° einschließt. Oder genauer ausgedrückt: Ziehen wir in der vertikal gedachten Zeichenebene Π durch irgend einen Punkt O die horizontale Gerade VW , sowie die beliebig lange Strecke OQ unter einem Winkel von 30° gegen OV und errichten in O zu Π nach vorn das Lot $OP = 2 \cdot OQ$, so soll die im Raume liegende Gerade PQ die Richtung der projizierenden Strahlen angeben (Fig. 1).

Man zeichne hiernach die schiefe Projektion eines Würfels mit horizontaler Grundfläche, von der zwei Kanten zu VW parallel sind, ferner diejenige eines aufrecht stehenden Kreuzes, dessen vordere Fläche $\parallel \Pi$ ist, u. s. w.

4. Die schiefe Projektion eines Vielfachs ist ohne weiteres konstruierbar, wenn eine Reihe von Strecken bekannt ist, die zur Bildebene parallel oder senkrecht sind, und die das Vielfach in der angenommenen Lage bestimmen.

Darstellung einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide mit horizontaler Grundfläche. Die vor Π befindliche Grundfläche $ABCDE$ sei gegeben durch die Schnittlinie VW ihrer Ebene mit Π und durch die Lage $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$, in die sie gelangt, wenn sie um

VW in Π nach unten umgelegt wird, dabei möge $C_0 D_0 \parallel VW$ sein. Die Höhe der Pyramide sei $= h$.

Um zunächst die schiefe Projektion A_s von A zu ermitteln, ziehe man $A_0 J \perp VW$ als Umlegung des von A auf VW gefälltten Lotes. Macht man dann $\angle A_s J V = 30^\circ$ und $J A_s = \frac{1}{2} J A_0$ (bequemer $A_0 A_s \perp J A_s$), so ist $J A_s$ die Projektion von $J A$. — Auf $A_0 J$ befinden sich die Mittelpunkte F_0, G_0 von $B_0 E_0, C_0 D_0$, sowie der Mittelpunkt M_0 des Fünfecks. Zieht man durch diese Punkte Parallelen zu $A_0 A_s$, so findet man auf $J A_s$ die entsprechenden Punkte F_s, G_s, M_s . Da $BE \parallel VW$, also $\parallel \Pi$ ist, so ist auch $B_s E_s \parallel VW$ und $F_s B_s = F_s E_s = F_0 B_0$. Ebenso ergibt sich $C_s D_s$. Die Höhenlinie der Pyramide ist $\parallel \Pi$ und $\perp VW$; ihre Projektion geht also durch $M_s \perp VW$ und ist $= h$.

5. Projiziert man die bisher dargestellten Körper in unveränderter Lage senkrecht auf Π , so zeigt sich, daß die entstehenden Bilder weniger anschaulich sind wie die zuvor erhaltenen, weil alle Geraden und Ebenen, die auf Π senkrecht stehen, bzw. als Punkte und Geraden abgebildet werden. Um auch in senkrechter Projektion anschauliche Bilder zu erhalten, müßte man die spezielle Lage angeben, welche die Körper gegen die Bildebene einnehmen, was jedoch die Konstruktion der Bilder erheblich erschweren würde. Die schiefe Parallelprojektion erweist sich demnach als besonders bequem, um von stereometrischen Figuren in einfachster Weise anschauliche Skizzen herzustellen, und in diesem Sinne soll sie im folgenden beständig benutzt werden.

II. Punkt, gerade Linie und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen.

Darstellung des Punktes.

6. Ein Punkt im Raume ist durch Angabe seiner schiefen oder senkrechten Parallelprojektion noch nicht bestimmt. Das gebräuchlichste Verfahren, um die Lage des Originalpunktes zu bestimmen, besteht in der Anwendung senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen, von denen die eine immer horizontal, die andere also vertikal gestellt wird. Indem wir diese Darstellungsweise den folgenden Entwicklungen zu grunde legen, lassen wir die vertikale Projektionsebene stets mit der Zeichenebene (Wandtafel) zusammenfallen und gebrauchen die feststehenden Bezeichnungen:

Horizontal- oder Grundrißebene, erste Projektionsebene, erste Tafel, Π_1 ;

Vertikal- oder Aufrißebene, zweite Projektionsebene, zweite Tafel, Π_2 ;

Projektionsachse oder kurz Achse für die Schnittlinie x beider Ebenen;

ferner in Bezug auf einen Originalpunkt P :

Horizontal- oder Grundrißprojektion, erste Projektion, P' ;

Vertikal- oder Aufrißprojektion, zweite Projektion, P'' ;
erster bzw. zweiter projizierender Strahl PP' , PP'' .

Wir unterscheiden vordere und hintere Π_1 ($+\Pi_1$ und $-\Pi_1$), sowie obere und untere Π_2 ($+\Pi_2$ und $-\Pi_2$). Die Projektionsebenen teilen den Raum in vier Quadranten, die in der Reihenfolge ($+\Pi_1, +\Pi_2$), ($-\Pi_1, +\Pi_2$), ($-\Pi_1, -\Pi_2$), ($+\Pi_1, -\Pi_2$) als erster bis vierter Quadrant bezeichnet werden.

7. Die Ebene durch die beiden projizierenden Strahlen des Punktes P ist senkrecht auf Π_1 und Π_2 , also auch auf x ; verstehen wir demnach unter P_x ihren Schnittpunkt mit x , so sind $P'P_x$ und $P''P_x$ auf x senkrecht, d. h.: Die von den beiden Projektionen eines Punktes auf die Achse gefälltten Lote treffen sich in der Achse. (Man zeichne hierzu, sowie zu den folgenden Figuren eine Skizze in schiefer Projektion auf die Zeichenebene Π_2 .)

In dem Rechteck $PP'P_xP''$ ist $PP' = P''P_x$, in Worten: Die Entfernung eines Punktes von der ersten Projektionsebene (sein erster Tafelabstand) ist gleich der Entfernung seiner zweiten Projektion von der Achse. Ebenso ist $PP'' = P'P_x$.

8. Um die Zeichnung auf eine einzige Ebene zu beschränken, drehen wir die Π_1 um x , bis sie mit Π_2 zusammenfällt, und zwar wollen wir diese Umlegung immer in der Weise ausführen, daß die $+\Pi_1$ auf die $-\Pi_2$ zu liegen kommt. Dann fällt $P'P_x$ in die Gerade $P''P_x$, d. h.: Die Projektionen eines Punktes liegen in einem Lote zur Projektionsachse.

Umgekehrt bilden irgend zwei Punkte P' und P'' der Zeichenebene, deren Verbindungslinie auf x senkrecht steht, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P , der auf diese Weise eindeutig bestimmt ist. Der Punkt P befindet sich oberhalb, in oder unterhalb Π_1 , je nachdem P'' oberhalb, in oder unterhalb x liegt, und er befindet sich vor, in oder hinter Π_2 , je nachdem P' unterhalb, in oder oberhalb x liegt.

Wir nennen Halbierungsebenen die beiden durch die Achse gehenden Ebenen H_1 und H_2 , die den ersten und dritten, bzw. den zweiten und vierten Quadranten halbieren. Die beiden Projektionen eines Punktes der H_1 liegen symmetrisch zu x , diejenigen eines Punktes der H_2 fallen zusammen.

9. Obwohl ein Raumgebilde durch Grund- und Aufriß seiner Punkte bereits vollkommen bestimmt ist, erweist es sich unter besonderen Umständen als zweckmäßig, seine senkrechte Projektion auf eine dritte Ebene Π_3 hinzuzufügen, die auf Π_1 und Π_2 , also auf x senkrecht ist und Seitenriß- oder Kreuzrißebene genannt wird. Dann entstehen die neuen Projektionsachsen $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$, und die drei Geraden x, y, z schneiden sich rechtwinklig im Punkte $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$.

Ist P''' die dritte Projektion des Punktes P , so haben die von P' und P''' auf y gefällten Lote denselben Fußpunkt P_y (7). Ebenso treffen sich die Lote von P'' und P''' auf z in einem Punkte P_z .

Die drei Tafelabstände $P'''P = OP_x$, $P''P = OP_y$, $P'P = OP_z$ werden in der analytischen Geometrie des Raumes als die Koordinaten von P bezeichnet. Sie dienen zur eindeutigen Bestimmung von P , wenn jeder einzelne Abstand von der betreffenden Ebene aus nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet wird.

Zum Zwecke der Darstellung wird naturgemäß auch die Π_3 mit der Zeichenebene Π_2 zur Deckung gebracht. Man erreicht dies am einfachsten durch eine Drehung um z , etwa so, daß die vordere Π_3 auf die linke Halbebene Π_2 zu liegen kommt. Man kann aber auch die Π_3 zunächst um y in die Π_1 umlegen (z. B. die obere Π_3 in die linke Halbebene Π_1) und dann die vereinigten Ebenen um x in dem früher festgesetzten Sinne so lange drehen, bis sie mit Π_2 zusammenfallen. Man beachte, daß bei der ersten Art der Umlegung die y -Achse, bei der zweiten die z -Achse in der Figur doppelt auftritt.

10. Aufgabe. Aus der ersten und zweiten Projektion P' und P'' eines Punktes P die dritte P''' zu konstruieren. Die Ebene Π_3 sei durch die Gerade $z \perp x$ gegeben. Wendet man die zuerst erwähnte Umlegung an, so fällt die Strecke $P_z P'''$, die gleich $P_x P'$ ist, in die Gerade $P'' P_z$ bzw. in deren Verlängerung über P_z . Hieraus folgt für die Bestimmung von P''' die einfache Regel: Man ziehe durch P'' eine Parallele zu x und mache auf ihr von z aus in geeignetem Sinne die Strecke $P_z P''' = P_x P'$.

Bei der zweiten Art der Umlegung ziehe man die Gerade $P' P_y \parallel x$ bis y und mache auf ihr bzw. auf ihrer Verlängerung die Strecke $P_y P''' = P_x P''$.

11. Zuweilen ist es vorteilhaft, die neue Projektionsebene so zu wählen, daß sie nur auf einer der beiden ursprünglichen Tafeln senkrecht steht. Sei z. B. $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und y die Schnittlinie beider Ebenen. Legt man, wie bei der zweiten Lösung der vorigen Aufgabe, die Π_3 um y in die Π_1 um, so ist nach 8 $P' P''' \perp y$ und nach 7 Abst. (P'' , y) $=$ Abst. (P , Π_1) $= P'' P_z$.

Darstellung der Geraden.

12. Eine Originalgerade g hat zu ihrer Grund- und Aufrißprojektion im allgemeinen zwei Geraden g' und g'' , nämlich die Schnittlinien ihrer ersten und zweiten projizierenden Ebene bzw. mit Π_1 und Π_2 (1).

Ist P ein Punkt von g , so liegt P' auf g' , P'' auf g'' , und zwar so, daß $P' P'' \perp x$ ist. Daher verhalten sich die Abschnitte auf g' wie die entsprechenden Abschnitte auf g'' .

13. Gerade Linien in spezieller Lage gegen die Projektionsebenen.

a) Ist $g \parallel \Pi_1$, so ist $g'' \parallel x$.

b) Ist $g \parallel x$, so sind g' und $g'' \parallel x$.

- c) Ist $g \perp \Pi_1$, so ist g' ein Punkt, $g'' \perp x$.
- d) Ist $g \perp x$, d. h. liegt g in einer zu x senkrechten Ebene, so befinden sich g' und g'' in einer zu x senkrechten Geraden.
- e) Liegt g in der ersten Halbierungsebene H_1 , so sind g' und g'' symmetrisch in Bezug auf x .
- f) Liegt g in H_2 , so decken sich g' und g'' .

14. Zwei beliebige Geraden g' und g'' der Zeichenebene, von denen keine auf x senkrecht steht, können umgekehrt als Projektionen einer Geraden g im Raume angesehen werden, die auf diese Weise eindeutig bestimmt ist. Bringt man nämlich die Π_1 mit der in ihr liegenden Geraden g' in ihre ursprüngliche Lage $\perp \Pi_2$, so ergibt sich g als Schnittlinie der beiden projizierenden Ebenen, die durch g' und g'' bzw. $\perp \Pi_1$ und $\perp \Pi_2$ gelegt werden.

Steht aber $g' \perp x$, so ist g'' entweder ein Punkt, oder g' und g'' liegen in derselben Vertikalen. Im letzten Falle decken sich die beiden projizierenden Ebenen; die Originalgerade ist also durch Angabe von g' und g'' noch nicht bestimmt. Hierzu bedarf es der Projektionen A' , A'' und B' , B'' zweier Punkte A und B der Geraden, oder der dritten Projektion g''' auf eine $\Pi_3 \perp x$.

15. Unter dem ersten bzw. zweiten Spurpunkte der Geraden g versteht man ihre Schnittpunkte G_1 und G_2 mit Π_1 und Π_2 (1).

Aufgabe. Die Spurpunkte der durch ihre Projektionen g' , g'' gegebenen Geraden g zu konstruieren. Da der Punkt G_1 der Geraden g angehört, so liegt G'_1 in g' und G''_1 in g'' ; dabei ist $G'_1 G''_1 \perp x$ (12). Da sich ferner G_1 in Π_1 befindet, so fällt G'_1 mit G_1 zusammen, und G''_1 liegt in x . Man bestimme demnach den Schnittpunkt G'_1 von g'' mit x und ziehe $G''_1 G_1 \perp x$ bis g' . — In analoger Weise ergibt sich G_2 : $G_2 = g' \times x$, $G_2 G_2 \perp x$ bis g'' .

Umgekehrt sind durch die Spuren G_1 und G_2 die Punkte G'_1 und G'_2 und damit die Projektionen g' und g'' von g bestimmt.

Um die Lage der Originalgeraden aus ihren Projektionen leichter beurteilen zu können, denkt man sich die Projektionsebenen als undurchsichtig und betrachtet die projizierenden Strahlen als Sehstrahlen aus einem unendlich fernen Auge, das sich für die erste Projektion oberhalb der Π_1 , für die zweite vor der Π_2 befindet. Dann ist der unterhalb Π_1 liegende Teil von g für das erste Auge unsichtbar; für das zweite ist er, soweit er dem vierten Quadranten angehört, bei der ursprünglichen Stellung der Π_1 sichtbar, seine Aufrißprojektion wird aber, wie überhaupt die ganze — Π_2 , von der umgelegten $+$ Π_1 verdeckt. Das Analoge gilt von dem hinter der Π_2 liegenden Teile von g . Deshalb ist nur das im ersten Quadranten befindliche Stück von g in beiden Projektionen als sichtbar voll auszuziehen.

16. Ist g als Verbindungslinie der Punkte A und B gegeben, die in einer zu x senkrechten Ebene liegen, so bestimmt man die Spurpunkte G_1 , G_2 mit Hilfe des Seitenrisses g''' . Man findet zunächst A''' und B''' (10), hierauf G'_1 auf y und G'_2 auf z .

17. Aufgabe. Die Neigungswinkel γ_1, γ_2 zu bestimmen, welche die durch ihre Spuren G_1, G_2 gegebene Gerade g bezw. mit Π_1, Π_2 bildet. (Erste und zweite Tafelneigung von g .) Der Winkel γ_1 liegt im Raume bei G_1 in dem rechtwinkligen Dreieck $G_2 G_1 G'_2$, dessen Katheten $G_2 G'_2$ und $G'_2 G_1$ bekannt sind; macht man also auf x die Strecke $G'_2 G_1^0 = G'_2 G_1$, so ist $\angle G_2 G_1^0 G'_2 = \gamma_1$ und $\angle G_2 G_1^0 G'_2$ die Umlegung von $\angle G_2 G_1 G'_2$ in die Π_2 . — Ebenso erhält man γ_2 durch Umlegung von $\angle G_1 G_2 G'_1$ in die Π_1 .

Unter allen Winkeln, welche g mit den durch G_2 gehenden Geraden von Π_2 einschließt, ist bekanntlich γ_2 der kleinste, also $\gamma_2 \leq \angle G_1 G_2 G'_2$, wobei das Gleichheitszeichen sich auf den Ausnahmefall $g \perp x$ bezieht. Nun ist aber $\angle G_1 G_2 G'_2 = 90^\circ - \gamma_1$, folglich $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 90^\circ$.

Bezeichnet man mit l, l', l'' bezw. die Längen einer auf g liegenden Originalstrecke, sowie ihrer ersten und zweiten Projektion, so ist

$$l' = l \cos \gamma_1, \quad l'' = l \cos \gamma_2.$$

Die Strecke l erscheint also in jeder Projektion im allgemeinen verkürzt, und zwar sind $\cos \gamma_1$ und $\cos \gamma_2$ die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse.

18. Aufgabe. Die wahre Länge der durch ihre Projektionen $A'B', A''B''$ gegebenen Strecke AB zu konstruieren. Zieht man in der ersten projizierenden Ebene von AB die Gerade $BC \parallel B'A'$ bis AA' , so entsteht das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $CB = A'B'$ und $AC = AA' - BB' = A''A_x - B''B_x$. Die wahre Länge von AB ist also gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches $A'B'$ und $A''A_x - B''B_x$ zu Katheten hat. Man ziehe daher die Gerade $B''C'' \parallel x$ bis $A''A'$ und mache auf ihr $C''B''_0 = A'B'$; dann ist $A''B''_0 = AB$.

Die eben ausgeführte Konstruktion läßt sich auch so deuten: Das Dreieck ABC ist durch Drehung um seine vertikale Kathete AC in eine neue Lage AB_0C gebracht worden, in der es $\parallel \Pi_2$ ist. Dann erscheint es im Aufriß in wahrer Größe.

Ebenso ist AB gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $A''B''$ und $A'A_x - B'B_x$.

19. Wenn zwei Geraden einander schneiden, so liegen die Schnittpunkte der gleichnamigen Projektionen in einem Lot zur Achse. Der umgekehrte Satz gilt nur dann nicht unbedingt, wenn eine der beiden Geraden $\perp x$ ist.

Sind zwei Geraden einander parallel, so sind die gleichnamigen Projektionen parallel. — Sind umgekehrt die Geraden g und h durch ihre Projektionen g', g'' und h', h'' gegeben und ist $g' \parallel h', g'' \parallel h''$, so sind die gleichnamigen projizierenden Ebenen parallel, folglich ist auch $g \parallel h$. In dem Ausnahmefalle, daß g' und g'' , sowie h' und h'' in je einer Senkrechten zu x liegen, hat man g''' und h''' zu konstruieren, um zu entscheiden, ob $g \parallel h$ ist.

Darstellung der Ebene.

20. Zur Bestimmung einer Ebene E genügt die Angabe der Projektionen von drei ihrer Punkte oder von zwei ihrer Geraden. Vor-

zugsweise benutzt man dazu ihre Schnittpunkte e_1 und e_2 mit Π_1 und Π_2 (erste bzw. zweite Spur oder Spurlinie). Die beiden Spuren treffen sich in x im Achsenschnittpunkte E_x .

Von der Ebene E sieht man in Grund- und Aufriß dieselbe Seite, oder entgegengesetzte Seiten, je nachdem die im ersten Quadranten liegenden Teile von e_1 und e_2 mit derselben Richtung oder mit entgegengesetzten Richtungen der Achse x spitze Winkel bilden. Ist die Ebene durch Grund- und Aufriß dreier Punkte A, B, C gegeben, so liegt der erste oder zweite Fall vor, je nachdem die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind.

Aufgabe. Die dritte Spurlinie e_3 zu konstruieren, in welcher die Ebene E (e_1, e_2) von der Seitenrißebene Π_3 geschnitten wird. Man bestimme die Punkte $E_y = e_1 \times y$ und $E_z = e_2 \times z$; dann ist $e_3 = E_y E_z$.

21. Ebenen in spezieller Lage gegen die Projektionsebenen.

a) Ist $E \parallel \Pi_1$, so liegt e_1 unendlich fern und e_2 ist $\parallel x$. Die zweite Projektion jedes Punktes von E befindet sich auf e_2 .

b) Ist $E \perp \Pi_1$, so ist $e_2 \perp x$, und die erste Projektion jedes Punktes von E liegt auf e_1 .

c) Ist $E \parallel x$, so sind e_1 und $e_2 \parallel x$. Die Seitenrißprojektionen aller Punkte von E liegen auf e_3 .

d) Geht E durch x , so ist die Angabe der dritten Spur oder eines beliebigen Punktes der E erforderlich.

22. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen die Spurpunkte der Geraden in den gleichnamigen Spurlinien der Ebene.

Mit Hilfe dieses Satzes löst man u. a. die Aufgaben:

a) Von der Geraden i , die in der Ebene E (e_1, e_2) liegt, ist die erste Projektion i' gegeben; i'' zu bestimmen. Die Gerade i' schneidet e_1 in J_1 , x in J_2 ; hieraus findet man J_1' auf x , J_2 auf e_2 und damit $i'' = J_1' J_2$. — Ist E durch zwei sich schneidende Geraden g und h gegeben, so ermittle man zu den Punkten $g' \times h' = A'$, $h' \times i' = B'$ die Aufrißprojektionen A'' und B'' bzw. auf g'' und h'' ; dann ist $i'' = A'' B''$.

b) Die Spurlinien der Ebene E zu konstruieren, die durch zwei sich schneidende Geraden g und h bestimmt ist. Man ermittle von g und h die Spurpunkte G_1, G_2 und H_1, H_2 ; dann ist $e_1 = G_1 H_1$, $e_2 = G_2 H_2$. — Sind die Spurpunkte von g und h zum Teil oder sämtlich unerreichbar, so ziehe man in geeigneter Weise eine oder mehrere Hilfsgeraden, von denen jede g und h schneidet. Wählt man die Grundrißprojektion i' einer solchen Hilfsgeraden i beliebig, so findet man i'' nach der vorigen Aufgabe, und dann gehen e_1 und e_2 bzw. durch die Spurpunkte J_1 und J_2 von i .

c) Durch die Gerade g (g', g'') eine Ebene zu legen parallel zu der Geraden h (h', h''). Zieht man durch einen beliebigen

Punkt von g die Gerade $l \parallel h$ (19), so bestimmen g und l die gesuchte Ebene (b).

23. Unter Hauptlinien einer Ebene versteht man diejenigen ihrer Geraden, die zu einer Projektionsebene, und folglich zu der betreffenden Spurlinie parallel sind. Ist m eine erste, n eine zweite Hauptlinie von E , so ist $m' \parallel e_1$, $m'' \parallel x$ und $n' \parallel x$, $n'' \parallel e_2$.

Aufgabe. Von dem Punkte P , der in der Ebene E (e_1, e_2) liegt, ist die erste Projektion P' gegeben; P'' zu bestimmen. Man ziehe durch P eine in E liegende Gerade, etwa die erste Hauptlinie m , also durch P' die Gerade $m' \parallel e_1$; dann liegt P'' auf m'' .

24. Sind zwei Ebenen parallel, so sind die gleichnamigen Spuren parallel.

Sind umgekehrt von zwei Ebenen E und Φ die Spuren e_1 und f_1 , sowie e_2 und f_2 parallel, so ist im allgemeinen auch $E \parallel \Phi$. Wenn aber e_1, e_2, f_1, f_2 mit x parallel laufen, so muß noch untersucht werden, ob auch $e_3 \parallel f_3$ ist.

Aufgabe. Durch den Punkt P (P', P'') eine Ebene zu legen, parallel zu der gegebenen Ebene E (e_1, e_2). Zieht man durch P eine Gerade m , die zu irgend einer Geraden g von E parallel ist, so geht die gesuchte Ebene Φ durch m , folglich gehen ihre Spurlinien f_1, f_2 bzw. durch die Spurpunkte M_1, M_2 von m und $\parallel e_1, e_2$. Im allgemeinen wird man g mit einer Spurlinie von E zusammenfallen lassen.

Schnitte von Ebenen und Geraden.

25. Aufgabe. Die Schnittlinie g zweier Ebenen E und Φ zu konstruieren, die durch ihre Spurlinien e_1, e_2 und f_1, f_2 bestimmt sind. Nach 22 ist $G_1 = e_1 \times f_1$, $G_2 = e_2 \times f_2$.

Besondere Fälle. a) Schneiden sich E und Φ in einem Punkte A von x , so fallen G_1 und G_2 mit A zusammen. Um einen zweiten Punkt von g zu erhalten, schneide man E und Φ mit einer passend gewählten Hilfsebene Δ in den Geraden h und i . Dann geht g durch den Schnittpunkt P von h und i . Nimmt man Δ etwa $\perp \Pi_1$ und zieht die erste Spurlinie d_1 beliebig, so ist $h' = i' = d_1$, und man findet $P'' = h'' \times i''$.

b) Liegt der Schnittpunkt von e_1 und f_1 außerhalb der Zeichenfläche, so benutzt man wiederum eine Hilfsebene, etwa $\Delta \parallel \Pi_1$ ($d_2 \parallel x$). Diese schneidet E und Φ bzw. in zwei ersten Hauptlinien h und i u. s. w.

c) Ist überdies auch der Punkt G_2 unerreichbar, so kann das letzte Verfahren zweimal angewendet werden. Diese Lösung versagt jedoch, wenn von keinem Punkte der gesuchten Geraden g beide Projektionen zugleich innerhalb der begrenzten Zeichenfläche liegen. Dann bedient man sich zweckmäßig einer Hilfsebene Δ , die zu einer der gegebenen Ebenen, z. B. zu Φ , parallel ist und deren Spuren d_1 ($\parallel f_1$) und d_2 ($\parallel f_2$) die gleichnamigen Spuren von E in erreichbaren Punkten

H_1 und H_2 treffen. Die Gerade g ist parallel zur Schnittlinie $h = H_1 H_2$ von Δ und E ; man kann also g' und g'' ziehen, sobald G'_2 und G''_1 bestimmt sind. Nun sind aber die beiden Achsenschnittpunkte D_x und F_x von Δ und Φ , und ebenso H'_2 und G'_2 , sowie H'_1 und G'_1 entsprechende Punkte in ähnlichen und parallel liegenden Figuren mit E_x als Ähnlichkeitspunkt; zieht man also durch E_x eine beliebige Gerade, die d_2 in K , f_2 in L schneidet, so ist $LG'_2 \parallel KH'_2$ und $LG'_1 \parallel KH'_1$.

26. Aufgabe. Den Schnittpunkt P der Geraden g (g' , g'') mit der Ebene E (e_1 , e_2) zu konstruieren. Man lege durch g eine Hilfsebene und bestimme deren Schnittlinie i mit E ; diese schneidet g in P . Im allgemeinen nimmt man als Hilfsebene eine projizierende Ebene von g , z. B. die erste. Dann ist $i' = g'$, und man findet i'' nach 22 a. (Sollte hierbei einer der Spurpunkte von i unerreichbar sein, so erhält man i'' , indem man den Schnittpunkt K von i mit einer passend gewählten Geraden der E , z. B. mit einer ersten Hauptlinie m , aufsucht.) — Man erkennt aus der zweiten Projektion, welcher Teil von g oberhalb i , also oberhalb E liegt, und folglich in der ersten Projektion sichtbar ist. Sieht man von E in beiden Projektionen dieselbe Seite (20), so ist im Aufriß derselbe Teil von g sichtbar wie im Grundriß.

In dem speziellen Falle, daß $E \perp \Pi_1$ ist, ergibt sich unmittelbar $P' = g' \times e_1$, und hieraus P'' auf g'' .

27. Ist die Ebene E durch drei Punkte A , B , C gegeben, so wendet man dasselbe Verfahren an, wie in 26, ohne etwa die Spuren von E zu bestimmen: Die erste projizierende Ebene von g schneidet AC und BC bzw. in den Punkten D und E , deren erste Projektionen auf g' liegen, die Ebene E also in der Geraden DE ; dann ist $P'' = g'' \times D'E'$.

Auf Grund dieser Aufgabe konstruiert man die Schnittlinie der Ebenen zweier Dreiecke, indem man von irgend zwei der sechs Dreiecksseiten die Schnittpunkte mit der anderen Ebene aufsucht.

Gerade Linien und Ebenen in rechtwinkliger Lage.

28. Ist ein Schenkel eines rechten Winkels zu einer Projektionsebene parallel, so ist die senkrechte Projektion des Winkels auf diese Ebene ein rechter. Sind nämlich g und h die Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitel A , und ist $h \parallel \Pi_1$, so steht h senkrecht auf AA' und auf g , also auf der Ebene (AA', g) . Dann ist aber die zu h parallele Gerade h' auf derselben Ebene senkrecht, also senkrecht auf der Geraden g' dieser Ebene.

Bezeichnet i irgend eine zu g parallele, zu h windschiefe Gerade, so ist $i' \parallel g'$, folglich $\perp h'$. D. h.: Sind überhaupt zwei (sich schneidende oder windschiefe) Geraden senkrecht aufeinander, und ist die eine von ihnen zu einer Projektionsebene parallel, so bilden ihre senkrechten Projektionen auf diese Ebene gleichfalls einen rechten Winkel.

Ist umgekehrt $h' \perp i'$ und $h \parallel \Pi_1$, so ist auch $h \perp i$.

29. Diejenigen Geraden einer Ebene E , die auf einer der Spurlinien e_1, e_2 senkrecht stehen, werden als Falllinien bezeichnet, weil sie unter allen Geraden der E die größte Neigung (den stärksten Fall) gegen die betreffende Projektionsebene haben. Ist f eine erste Falllinie der E , d. h. $\perp e_1$, so steht nach 28 $f' \perp e_1$.

30. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so stehen die senkrechten Projektionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene. Denn ist die Gerade $g \perp E$, so steht sie auch senkrecht auf e_1 und e_2 , also ist nach dem zweiten Satze in 28 $g' \perp e_1, g'' \perp e_2$.

Stehen umgekehrt g' und g'' bzw. senkrecht auf e_1 und e_2 , so ist im allgemeinen auch $g \perp E$. Sind e_1 und $e_2 \parallel x$, g' und $g'' \perp x$, so ist noch zu untersuchen, ob auch $g''' \perp e_3$ ist.

31. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P (P', P'')$ von der Ebene $E (e_1, e_2)$ zu bestimmen. Man fälle von P auf E ein Lot l (30) und ermittle seinen Schnittpunkt Q mit E (26), sowie die wahre Länge von PQ (18).

32. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P (P', P'')$ von der Geraden $g (g', g'')$ zu bestimmen. Erste Lösung. Die gesuchte Entfernung wird durch das Lot PQ gemessen, das von P auf g gefällt ist. Da die Projektionen von PQ nicht ohne weiteres gezeichnet werden können, so ermittelt man den Fußpunkt Q als Schnittpunkt von g mit der Ebene E , die durch $P \perp g$ gelegt wird. Die Spuren von E sind senkrecht auf g' und g'' ; bezeichnet man also mit m und n bzw. die durch P gehende erste und zweite Hauptlinie, so ist $m' \perp g', m'' \parallel x$ und $n' \parallel x, n'' \perp g''$. Durch m und n ist E bestimmt; ohne die zugehörigen Spurlinien zu ermitteln, findet man den Punkt $Q = g \times E$ (27) und konstruiert schließlich die wahre Länge von PQ (18). — Zweite Lösung vergl. 39.

33. Aufgabe. Die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden $g (g', g'')$ und $h (h', h'')$ zu bestimmen (d. h. diejenige zwischen g und h liegende Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht). Man lege durch g eine Ebene $E (e_1, e_2) \parallel h$ (22 c), fälle von einem beliebigen Punkte A von h auf E das Lot l und bestimme seinen Schnittpunkt B mit E (31). Zieht man hierauf $BC \parallel h$ bis g und $CD \parallel BA$ bis h , so ist CD die gesuchte kürzeste Entfernung, deren wahre Länge noch zu bestimmen ist.

Drehung einer Ebene um eine Spur oder um eine Hauptlinie.

34. Eine ebene Figur und ihre senkrechte Projektion sind dann und nur dann kongruent, wenn die Originalfigur zur Projektionsebene parallel liegt. Ist daher eine solche Figur in beliebiger Lage durch Grund- und Aufriß dargestellt, so findet man ihre wahre Größe, indem man sie zu einer der Projektionsebenen parallel macht oder ganz in diese umlegt. Die erste Lagenveränderung bewirkt man durch Drehung der Originalebene um eine zur betreffenden Projektionsebene parallele Hauptlinie, die zweite durch Drehung um die entsprechende Spur.

Bei Darstellungen in schiefer Projektion auf die Zeichenebene Π_2 erfolgt diese Drehung naturgemäß immer um eine zweite Hauptlinie, bzw. um die zweite Spur.

35. Aufgabe. Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden g (g', g'') und h (h', h'') zu bestimmen. Erste Lösung. Sei P der Schnittpunkt, E die Ebene von g und h . Man konstruiere von beiden Geraden die ersten Spurpunkte G_1, H_1 und drehe die Ebene E um ihre erste Spurlinie $e_1 = G_1H_1$, bis sie mit Π_1 zusammenfällt. Dann beschreibt P einen Kreisbogen in einer auf e_1 senkrechten Ebene; sein Mittelpunkt ist der Fußpunkt J des Lotes von P auf e_1 . Nach 28 ist auch $P'J \perp e_1$; der Punkt P bewegt sich also in der Ebene $PP'J$ und fällt schließlich in die Gerade $P'J$. Bezeichnet man seine Umlegung mit P_0 , so ist $P_0J = PJ$, d. h. gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $P'J$ und $PP' = P''P_x$. Daher die Lösung: Man ziehe $P'J \perp e_1$, mache auf e_1 die Strecke $JK = P''P_x$ und auf $P'J$ die Strecke $JP_0 = P'K$. Dann sind P_0G_1 und P_0H_1 die Umlegungen von PG_1 und PH_1 , also ist $\angle G_1P_0H_1$ die wahre Größe des Winkels G_1PH_1 .

Zweite Lösung. Ist P von Π_1 so weit entfernt, daß die Ausführung der vorigen Konstruktion zu viel Platz beanspruchen würde, so dreht man die Ebene E zweckmäßiger um eine passend gewählte erste Hauptlinie m , bis sie $\parallel \Pi_1$ wird. Man zieht also $m'' \parallel x$, bestimmt zu den Punkten $m'' \times g'' = C''$, $m'' \times h'' = D''$ auf g' und h' bzw. die Punkte C', D' und findet $m' = C'D'$. Sei nun Σ die durch m gehende Horizontalebene, Q ihr Schnittpunkt mit PP' , J der Fußpunkt des Lotes von P auf m ; dann ist auch $QJ \perp m$, und man erhält in Σ die Umlegung P_0 von P , indem man JP von J aus auf QJ abträgt. Da Q' mit P' zusammenfällt, so ist das Lot von P' auf m' die erste Projektion von QJ . Die wahre Länge von JP ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $PQ = P''Q''$ und $QJ = P'J'$. Macht man auf $P'J'$ die Strecke $J'P_0'$ gleich dieser Hypotenuse, so ist P_0' die erste Projektion von P_0 , mithin $\angle C'P_0'D'$ die erste Projektion des in Σ umgelegten Winkels CPD und daher seine wahre Größe.

Für die Umlegung einer ebenen Figur in eine Ebene gelten hier- nach die folgenden Sätze:

1. Die Umlegung jedes Punktes und seine senkrechte Projektion auf die Ebene liegen in einem Lot zur Drehungs- achse.
2. Der Abstand dieser Umlegung von der Drehungsachse ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches das vom Punkte auf die Ebene gefällte Lot und den Abstand seines Fußpunktes von der Drehungsachse zu Katheten hat.
3. Die Umlegung jeder Geraden geht durch den Schnitt- punkt der Geraden mit der Drehungsachse.

36. Beziehungen zwischen der Größe eines Winkels und der Größe seiner senkrechten Projektion. Sei BAC ein spitzer Winkel und $AC \parallel \Pi_1$. Zieht man $BC \perp AC$, so ist auch

$B'C' \perp A'C'$ (28). In den rechtwinkligen Dreiecken $B'A'C'$ und BAC sind die Katheten $A'C'$ und AC einander gleich, dagegen ist $B'C' < BC$, folglich auch $\angle A' < \angle A$. D. h.: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel zur Projektionsebene parallel ist, wird durch senkrechte Projektion verkleinert.

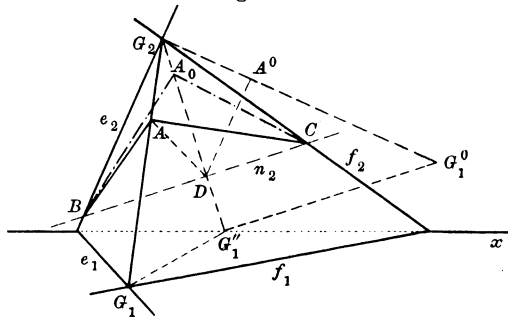
Aus denselben Dreiecken ergibt sich ferner, daß $\angle B' > \angle B$ ist. In Worten: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel eine Falllinie seiner Ebene ist, wird durch senkrechte Projektion vergrößert.

Wenn ein Winkel die durch seinen Scheitel gehende Hauptlinie einschließt, die durch denselben Punkt gehende Falllinie aber ausschließt, so wird er durch senkrechte Projektion verkleinert. Schließt er umgekehrt die Falllinie ein, die Hauptlinie aber aus, so wird er vergrößert. Schließt er beide Linien ein oder beide aus, so kann er verkleinert oder vergrößert werden, oder ungeändert bleiben.

37. Aufgabe. Den Winkel zweier Ebenen $E (e_1, e_2)$ und $\Phi (f_1, f_2)$ zu bestimmen. Erste Lösung. Fällt man von einem beliebigen Punkte P auf E und Φ bezw. die Lote g und h , so bilden diese denselben Winkel, wie E und Φ (35).

Zweite Lösung. (Fig. 2 gibt eine Skizze in schiefer Parallelprojektion auf die Zeichenebene Π_2 . Der Index s , den wir früher zur Bezeichnung der schiefen Projektion benutzt haben, ist hier der Kürze wegen weggelassen.) Man lege senkrecht zur Schnittlinie $G_1 G_2$ von E und Φ eine Ebene N ;

Fig. 2.



diese schneidet E und Φ in den Schenkeln des gesuchten Winkels α . Ihre zweite Spurlinie n_2 ist $\perp G_1' G_2$ und kann im übrigen beliebig angenommen werden. Bezeichnet man mit B, C und D bezw. die Schnittpunkte von n_2 mit e_2, f_2 und $G_1' G_2$, mit A den noch unbekannten Schnittpunkt von N und $G_1 G_2$, so ist $\angle BAC = \alpha$. Die Gerade DA ist die Schnittlinie der Ebenen N und $G_1 G_1' G_2$; sie ist die Höhenlinie im Dreieck BAC , weil n_2 auf der Ebene $G_1 G_1' G_2$ senkrecht steht, und zugleich das Lot von D auf $G_1 G_2$, weil $N \perp G_1 G_2$ ist. Man erhält daher die wahre Länge von DA , indem man das rechtwinklige Dreieck $G_1 G_1' G_2$ um seine Kathete $G_1' G_2$ in Π_2 umlegt: Zieht man $G_1' G_1'' \perp G_1' G_2$ und $= G_1 G_1'$, sowie $DA^0 \perp G_1' G_2$, so ist $DA = DA^0$. Nunmehr ergibt sich die wahre Größe des Winkels α durch Umlegung des Dreiecks BAC um BC in Π_2 . Dabei fällt die Höhenlinie DA in die Gerade $G_1' G_2$; macht man auf dieser $DA_0 = DA^0$, so findet man $\alpha = \angle BA_0 C$. (In Fig. 2 liegt der Punkt A auf der Parallelen durch A^0 zu $G_1 G_1'$.)

38. Aufgabe. Die Neigungswinkel $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zu bestimmen, welche die Ebene $E(e_1, e_2)$ bzw. mit Π_1, Π_2 bildet. Eine Normalebene zu e_1 durch einen beliebigen Punkt O von x schneidet Π_1 in $OQ \perp e_1$, Π_2 in $OR \perp x$, E in der Falllinie QR . Dann ist $\angle OQR = \varepsilon_1$, und man erhält seine wahre Größe durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks OQR um OR in Π_2 : Macht man auf x die Strecke $OQ_0 = OQ$, so ist $\angle OQ_0R = \varepsilon_1$. — In analoger Weise ergibt sich ε_2 .

Da ε_1 und ε_2 komplementär sind zu den entsprechenden Tafelneigungen einer auf E senkrechten Geraden, so folgt aus 17, daß $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 90^\circ$ ist.

39. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P(P', P'')$ von der Geraden $g(g', g'')$ zu bestimmen. Zweite Lösung. Man findet die gesuchte Entfernung, indem man in der durch P und g bestimmten Ebene Δ die Gerade $PQ \perp g$ zieht. Um den rechten Winkel zwischen g und PQ , sowie die Strecke PQ im Bilde in wahrer Größe zu erhalten, drehe man die Ebene Δ , bis sie zu einer Projektionsebene, z. B. zu Π_2 , parallel wird. Als Drehungsachse dient eine zweite Hauptlinie von Δ , am zweckmäßigsten die durch P gehende Gerade n , die g in R schneidet. Da P und R fest bleiben, so ist nur noch von einem beliebigen Punkte S von g die Umlegung S_0 zu ermitteln. (Vergl. 35, zweite Lösung.) Dann ist $R''S_0''$ die zweite Projektion der Umlegung von g , und man findet $PQ = P''Q_0'' \perp R''S_0''$.

Affinität zwischen einer ebenen Figur und ihrer Parallelprojektion. Ebene Vielecke.

40. Zwischen zwei ebenen Figuren, deren eine die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion der anderen ist, besteht eine geometrische Abhängigkeit (Verwandtschaft), die als Affinität bezeichnet wird: Jedem Punkte und jeder durch ihn gehenden Geraden der einen Figur entspricht in der anderen bzw. ein Punkt und eine durch diesen gehende Gerade; parallelen Geraden entsprechen wieder parallele Gerade u. s. f.

Die spezielle Lage, in der die beiden Figuren sich befinden, wenn die eine als Projektion der anderen konstruiert wird, heißt die perspektive Lage. Sie ist durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet: 1. Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte (Affinitätsstrahlen) sind parallel; 2. alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen in einer Geraden, nämlich in der Schnittlinie der Ebenen beider Figuren (Affinitätsachse).

Projiziert man die betrachteten Figuren in beliebiger Richtung auf eine neue Ebene, so erhält man wiederum zwei perspektiv affine Figuren, deren Achse die Projektion der ursprünglichen Affinitätsachse ist.

41. Konstruiert man von der in der Ebene E liegenden Originalfigur $AB \dots$ zwei Parallelprojektionen $A'B' \dots$ und $A_0B_0 \dots$ auf ein und dieselbe Projektionsebene Π , so sind die Geraden $A'A_0, B'B_0 \dots$

einander parallel als Schnittlinien von Π mit den parallelen Ebenen $AA'A_0$, $BB'B_0$..., und die Geraden $A'B'$ und A_0B_0 schneiden sich mit AB auf der Spurlinie e von E ; die beiden Figuren sind also unter sich perspektiv affin und haben e zur Affinitätsachse. Wählt man nun insbesondere die projizierenden Strahlen AA_0 , BB_0 ... senkrecht zur Halbierungsebene eines der beiden von E und Π gebildeten Flächenwinkel, so ist A_0B_0 ... die Umlegung von AB ..., die sich ergibt, wenn die Ebene E durch den betrachteten Winkel um e gedreht wird, bis sie mit Π zusammenfällt. Daraus folgt: Die Parallelprojektion und die Umlegung einer ebenen Figur in die Bildebene sind perspektiv affin für die Spurlinie der Original-ebene als Affinitätsachse.

Sind demnach von einer ebenen Figur ABC ... die Spurlinie e , die Umlegung $A_0B_0C_0$... und das Bild A' eines Punktes A bekannt, so ist die Bildfigur bestimmt.

Im Falle senkrechter Projektion ist $A_0A' \perp e$.

42. Kennt man von einem ebenen Vieleck $ABCD$... die Grundrißprojektion $A'B'C'D'$... und von drei Punkten A , B , C auch die Aufrißprojektionen A'' , B'' , C'' , so sind die Aufrißprojektionen der übrigen Eckpunkte bestimmt. Man findet z. B. zum Punkte $J' = A'C' \times B'D'$ den Punkt J'' auf $A''C''$, somit die Gerade $B''J''$ und auf dieser den Punkt D'' .

Im Schnittpunkte der Geraden $A'B'$ und $A''B''$ sind die beiden Projektionen desjenigen Punktes vereinigt, in welchem die zweite Halbierungsebene H_2 von AB getroffen wird; das analoge gilt vom Punkte $B'C' \times B''C''$ u. s. w. Die genannten Schnittpunkte liegen aber sämtlich in einer Geraden w , nämlich in den sich deckenden Projektionen der Schnittlinie der Ebenen H_2 und $ABCD$... Daraus folgt: Die beiden Projektionen einer ebenen Figur sind perspektiv affin — selbstverständlich, nachdem die Umlegung der ersten Projektionsebene in die zweite bereits vollzogen ist.

43. Aufgabe. Ein ebenes Vieleck ABC ... ist durch die Spuren e_1 , e_2 seiner Ebene E und seine erste Projektion $A'B'C'$... gegeben; seine zweite Projektion und seine wahre Größe zu bestimmen. Erste Lösung. Man konstruiere zunächst die zweiten Projektionen der Eckpunkte mit Hilfe von Hauptlinien (23), oder sogleich die zweiten Projektionen einzelner Seiten (22 a). Darauf ergibt sich die wahre Größe des Vielecks durch Umlegung der Ebene E , etwa um e_1 in Π_1 . Hat man von einem Eckpunkte A (am zweckmäßigsten von demjenigen, der von e_1 am weitesten entfernt ist) die Umlegung A_0 ermittelt (35), so findet man B_0 , C_0 ... unmittelbar zufolge der perspektiv affinen Beziehung, die nach 41 zwischen Grundriß und Umlegung besteht.

Eine zweite Lösung beruht auf der Einführung einer neuen Projektionsebene Π_3 , die auf E und auf einer der ersten beiden Projektionsebenen, z. B. auf Π_1 und demnach auf e_1 senkrecht steht. Legt man die Π_3 durch einen beliebigen Punkt Q von e_1 und bezeichnet mit O und R bzw. ihre Schnittpunkte mit x

und e_2 , so ist $y = OQ \perp e_1$, $OR \perp x$ und $e_3 = RQ \perp e_1$. Durch Umlegung der Π_3 in Π_1 gelangt das rechtwinklige Dreieck OQR nach OQR^0 , wenn $OR^0 \perp OQ$ und $= OR$ gemacht wird.

Da E auf Π_3 senkrecht steht, so befinden sich die dritten Projektionen aller Punkte von E in e_3 ; ihre Umlegungen A''' , $B''' \dots$ sind also die Schnittpunkte von QR^0 mit den Loten, die von A' , $B' \dots$ auf die Projektionsachse y gefällt werden (11). Dann ist

$$\text{Abst. } (A'', x) = AA' = \text{Abst. } (A''', y);$$

ferner $A'A_0 \perp e_1$ und

$$\text{Abst. } (A_0, e_1) = \text{Abst. } (A, e_1) = A'''Q.$$

Fällt der Punkt R^0 in unerreichbare Entfernung, so findet man die Umlegung von e_3 , indem man von irgend einem Punkte der Ebene E , z. B. von dem beliebigen Punkte S der Geraden e_2 , die dritte Projektion bildet $[SS' \perp x, S'S''' \perp y, \text{Abst. } (S''', y) = SS']$.

Ist das Vieleck durch die Spuren e_1, e_2 seiner Ebene und seine Umlegung $A_0B_0 \dots$ gegeben, so führen dieselben Konstruktionslinien in veränderter Reihenfolge zur Bestimmung von Grund- und Aufriß.

$\angle OQR^0$ ist gleich dem Neigungswinkel ε_1 von E gegen Π_1 .

44. Aufgabe. Von einem ebenen Vieleck kennt man eine erste Hauptlinie m und den ersten Neigungswinkel ε_1 seiner Ebene E , sowie die erste Projektion $A'_0B'_0 \dots$ seiner Umlegung in die durch m gehende Horizontalebene Σ ; die Projektionen des Vielecks zu bestimmen. Eine dritte Projektionsebene $\Pi_3 \perp m$ schneidet Σ in einer Geraden $y \perp m$ ($y' \perp m'$) und E in einer Falllinie e_3 , so daß $\angle e_3, y = \varepsilon_1$ ist. Wird Π_3 um y in Σ umgelegt, so erhält man die Grundrißprojektion e'_3 der gedrehten Falllinie, indem man $\angle \varepsilon_1$ in $Q' = m' \times y'$ an y' anträgt. Macht man auf e'_3 die Strecke $Q'A''' = \text{Abst. } (A'_0, m')$, so ergibt sich A' als Schnittpunkt der Lote von A'_0 auf m' und von A''' auf y' , und es ist $\text{Abst. } (A'', m'') = \text{Abst. } (A''', y')$.

Mit Hilfe der dritten Projektion auf eine Ebene $\Pi_3 \perp m$ löst man auch die Aufgabe, die Figur $AB \dots$ um die Gerade m durch einen gegebenen Winkel α zu drehen.

III. Ebenflächige Gebilde.

Das Dreikant.

45. Wir bezeichnen im folgenden immer mit S den Scheitel des Dreikants, mit a, b, c die Kanten, mit A, B, Γ die ihnen der Reihe nach gegenüberliegenden Seiten (Kantenwinkel). Unter $\angle a$ soll der Flächenwinkel verstanden werden, den die Ebenen B und Γ an der Kante a einschließen.

Aufgabe. Ein Dreikant zu konstruieren aus den drei Seiten A, B, Γ . Wir lassen die Seite $A = b, c$ mit der Zeichenebene zusammenfallen und bilden von dem Dreikant nur die senk-

rechte Projektion auf diese eine Ebene. Legen wir die Seite B um c , die Seite Γ um b in Zeichenebene um, so gelangt a bzw. nach a_1 und a_2 . Zwei Punkte A_1 und A_2 , die auf a_1 und a_2 in beliebigen, aber gleichen Abständen von S angenommen werden, sind die zugehörigen Umlegungen eines Punktes A von a ; seine Projektion A' ist der Schnittpunkt der Lote von A_1 auf c und von A_2 auf b . Damit ist die Projektion a' von a gefunden.

Bezeichnen wir mit J und K bzw. die Schnittpunkte von c und A_1A' , sowie von b und A_2A' , so sind die Winkel AJA' und AKA' gleich den Flächenwinkeln c und b . Wir erhalten sie in wahrer Größe, indem wir die rechtwinkligen Dreiecke $AA'J$ und $AA'K$ in die Zeichenebene umlegen: Machen wir $A'A_3 \perp JA'$, $JA_3 = JA_1$ und $A'A_4 \perp KA'$, $KA_4 = KA_2$, so wird $\angle A_3JA' = \angle c$ und $\angle A_4KA' = \angle b$. Dann ist $A_3A' = A_4A'$, nämlich $= AA'$.

Um endlich $\angle a$ zu ermitteln, ziehen wir in den Ebenen B und Γ die Geraden AL und $AM \perp a$ bzw. bis c und b , in der Umlegung also $A_1L \perp a_1$, $A_2M \perp a_2$. Konstruieren wir von dem Dreieck LMA die Umlegung LMA_5 , in welcher $LA_5 = LA_1$, $MA_5 = MA_2$ ist, so ergibt sich $\angle a = \angle LA_5M$.

Die drei Seiten A, B, Γ bestimmen ein Dreikant nur dann, wenn jede von ihnen kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

46. Aufgabe. Ein Dreikant zu konstruieren aus einer Seite A und den beiden anliegenden Winkeln b und c . Wir legen wieder A in die Zeichenebene und bestimmen die Kante a als Schnittlinie der Seitenflächen B und Γ , die durch die Kanten c und b gehen und mit der Zeichenebene die gegebenen Winkel bilden. Eine Hilfebene, die in dem beliebigen Abstände h parallel zur Zeichenebene gelegt wird, schneidet B und Γ bzw. in den Hauptlinien $m \parallel c$ und $n \parallel b$. Um die Projektion von m zu bestimmen, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt C von c einen Normalschnitt gegen die Kante c geführt. Trifft derselbe m in P , so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $PP'C$, dessen Kathete CP' auf c senkrecht steht, $\angle PCP' = \angle c$ und die Kathete $PP' = h$. Wir erhalten also CP' , d. h. den Abstand der parallelen Geraden c und m' , als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem der Kathete h der Winkel c gegenüberliegt. In analoger Weise ergibt sich die Gerade n' . Dann geht a' durch den Punkt $A' = m' \times n'$.

Um den Kantenwinkel B zu bestimmen, legen wir die Seite (a, c) um c in die Bildebene um. Fällt hierbei A nach A_1 , so ist Abst. (A_1, c) gleich der Hypotenuse des vorher benutzten rechtwinkligen Dreiecks $PP'C$.

Darstellung einiger Vielfläche.

47. In Fig. 3 (a. f. S.) ist ein Tetraeder $ABCD$ in Grund- und Aufriß dargestellt. Jeder projizierende Strahl, der den Körper schneidet, enthält einen sichtbaren und einen unsichtbaren Punkt seiner Oberfläche. Das windschiefe Viereck $ABCD$, in welchem die ersten projizierenden Strahlen das Tetraeder streifen (ohne es zu schneiden), heißt

der erste wahre Umriß und seine Grundrißprojektion der erste scheinbare Umriß des Körpers. Der erste wahre Umriß trennt den im Grundriß sichtbaren Oberflächenteil vom unsichtbaren. Von den beiden Kanten AC und BD ist AC im Grundriß sichtbar, denn wie

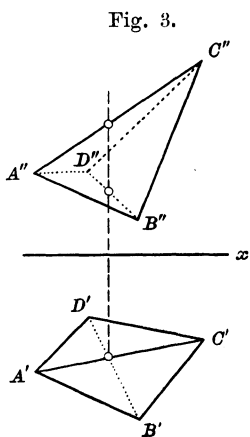


Fig. 3.

der Aufriß zeigt, trifft der erste projizierende Strahl, der beide Kanten schneidet, die Gerade AC in einem Punkte, der höher liegt als sein Schnittpunkt mit BD . — Die drei in D zusammenstoßenden Flächen sind im Aufriß unsichtbar; denn aus dem Grundriß folgt, daß D sich hinter dem Dreieck ABC befindet.

48. Aufgabe. Ein gerades Prisma in Grund- und Aufriß darzustellen, wenn gegeben ist 1. der Eckpunkt A durch A', A'' , 2. von der Grundfläche ABC die durch A gehende erste Hauptlinie m , der erste Neigungswinkel ε_1 und die Grundrißprojektion $A'B_0C_0$ der Umlegung in die durch m gehende Horizontalebene, 3. die Länge der Seitenkante AD . Man konstruiere zunächst die Projektionen der Grundfläche in derselben Weise wie in 44 mit Hilfe einer $\Pi_3 \perp m$. Da die Kante $AD \parallel \Pi_3$ ist, so erscheint sie in dritter Projektion in wahrer Größe und senkrecht auf der dritten Spurlinie der Grundfläche. Dann ist D' der Schnittpunkt der Geraden $A'D' \perp m'$ und $D'''D'' \parallel m'$, ferner $\text{Abst. } (D'', m'') = \text{Abst. } (D''', y')$.

49. Aufgabe. Ein regelmäßiges Zwölfflach darzustellen, dessen eine Fläche $A_1A_2A_3A_4A_5$ in Π_1 liegt (Fig. 4). Die übrigen Eckpunkte des Körpers befinden sich zu je fünf in drei horizontalen Ebenen und bilden in ihnen drei regelmäßige Fünfecke,

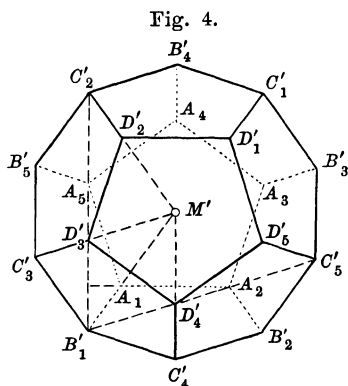


Fig. 4.

die wir in der Reihenfolge von unten nach oben mit $B_1 \dots B_5$, $C_1 \dots C_5$, $D_1 \dots D_5$ bezeichnen. Dabei soll B_1 denjenigen der Punkte B bedeuten, der mit A_1 durch eine Kante verbunden ist. Die Punkte A und D , sowie die Punkte B und C liegen paarweise auf zehn Geraden, die sich im Mittelpunkt M des Körpers halbieren; solche Gegenecken sollen immer denselben Index erhalten. Die Punkte A und die Grundrißprojektionen der Punkte D bilden zusammen die Ecken eines regelmäßigen Zehnecks, und ebenso

sind die Punkte B' und C' die Ecken eines zweiten regelmäßigen Zehnecks, welches mit dem ersten parallel und konzentrisch ist. Wir bezeichnen die Radien der umgeschriebenen Kreise für das erste und zweite Zehneck bzw. mit r_1 und r_2 , die Seite des ersten mit s .

Betrachten wir die Grundfläche $A_1 \dots A_5$ als gegeben, so ist zur Bestimmung der Grundrißprojektion des Zwölfflachs ein Eckpunkt des zweiten Zehnecks, z. B. B'_1 , erforderlich. Drehen wir nun das Fünfeck $A_1 B_1 C_4 B_2 A_2$ um $A_1 A_2$, bis es mit der Grundfläche zusammenfällt, so gelangt B_1 nach A_5 ; B'_1 liegt folglich auf dem Lot von A_5 auf $A_1 A_2$, und ebenso ist $A_2 B'_1 \perp A_1 A_5$. — Noch genauer erhalten wir B'_1 durch folgende Überlegung: Die vier Punkte B'_1, D'_3, A_5, C'_2 liegen auf einer Parallelen zu $M'D'_4$ und die Punkte B'_1, D'_4, A_2, C'_6 auf einer Parallelen zu $M'D'_5$. Das Viereck $M'D'_5 B'_1 D'_4$ ist folglich ein Rhombus; es ist also $D'_5 B'_1 = r_1$, und die Strecke $M'B'_1$ wird von $D'_5 D'_4$ senkrecht halbiert. Ferner ist $A_1 D'_3 \parallel M'C'_2$, also $\angle B'_1 A_1 D'_3 \sim \angle B'_1 M' C'_2$, mithin $\angle B'_1 A_1 D'_3$ gleichschenkelig und $A_1 B'_1 = s$. Hieraus folgt noch $r_2 = r_1 + s$.

Um die Aufrißprojektion zu konstruieren, brauchen wir nur noch die Entfernungen der Punkte B und C von Π_1 zu bestimmen. Bezeichnen wir sie bezw. mit h und i , so ist der erste Tafelabstand der Punkte $D = h + i$. — Da die Bildstrecken $A_5 C'_2$ und $A_5 B'_1$ auf $A_5 A_3$ senkrecht stehen, so sind auch die Originalstrecken $A_5 C_2$ und $A_5 B_1$ senkrecht auf $A_5 A_3$ (28). Wir schließen hieraus allgemein, daß von den sechs Diagonalen der Seitenflächen, die von einer Ecke ausgehen, je zwei aufeinander senkrecht sind, die durch eine Diagonale getrennt werden. Daher steht auch $A_5 C_2 \perp A_5 B_1$, und da beide Strecken einander gleich sind, so ist $\angle A_5 B_1 B'_1 \cong \angle C_2 A_5 C'_2$, folglich $B_1 B'_1 = A_5 C'_2$ und $C_2 C'_2 = A_5 B_1$. Nun ist aber $A_5 C'_2 = D'_3 B'_1 = r_1$ und $A_5 B'_1 = A_5 D'_3 + D'_3 B'_1 = s + r_1 = r_2$, mithin ergibt sich $h = r_1$ und $i = r_2$.

Aufgabe. Man konstruiere von dem dargestellten Zwölfflach die schiefe Projektion auf die Π_2 ¹⁾.

Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene.

50. Man konstruiert den Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene E im allgemeinen in der Weise, daß man die Schnittpunkte seiner Kanten mit E , also die Eckpunkte der Schnittfigur, ermittelt (Kantenverfahren). Dabei kommen naturgemäß nur solche Schnittpunkte in Betracht, die innerhalb der begrenzten Kante liegen.

Um die Schnittpunkte der einzelnen Kanten mit E zu bestimmen, bedient man sich entweder der projizierenden Ebenen dieser Kanten (26, 27), oder man benutzt eine Π_3 , die auf E und auf einer der beiden ersten Projektionsebenen, mithin auf der betreffenden Spur von E senkrecht steht. In diesem Falle konstruiert man also die dritte Projektion des Körpers (11) und die dritte Spur von E und erhält auf ihr unmittelbar die dritte Projektion der Schnittfigur (43).

51. Aufgabe. Das Netz eines schiefen Prismas zu konstruieren, dessen Grundfläche $A_1 B_1 C_1$ in Π_1 liegt. Die

¹⁾ Bezüglich weiterer Aufgaben über regelmäßige Vielfache vergl. unter anderem die Lehrbücher der darstellenden Geometrie von Wiener (I, S. 128) und Rohn und Papperitz (I, S. 99).

Seitenflächen des Prismas sind Parallelelogramme, deren wahre Größe aus je zwei Seiten und einer Diagonale leicht gefunden wird (18). Vorzuziehen ist jedoch die Anwendung eines Normalschnitts: Man lege eine Ebene N senkrecht gegen die Seitenkante $A_1 A_2$ (Spurlinie $n_1 \perp A_1 A_2$) und bestimme ihren Schnitt $A_3 B_3 C_3$ mit dem Prisma mittels der dritten Projektion auf eine $\Pi_3 \perp n_1$. [Projektionsachse $y \perp n_1$, $A_1 A_1''$ und $A_2 A_2'' \perp y$, Abst. $(A_2'', y) = \text{Abst.}(A_2'', x)$, $n_3 \perp A_1'' A_2''$ enthält die Punkte A_3'' , B_3'' , C_3'' .] Ferner konstruiere man die wahre Größe des Normalschnitts durch Umlegung der N in Π_1 ; dabei fällt A_3 nach A_3^0 auf $A_1 A_2$, und es ist Abst. (A_3^0, n_1) gleich der Entfernung des Punktes A_3'' vom Punkte $n_3 \times y$.

Da die Seiten des Normalschnitts auf den Seitenkanten des Prismas senkrecht stehen, so verwandelt sich jener bei der Abwicklung des Prismas in eine Gerade mit den Teilstrecken $A_3 B_3 = A_3^0 B_3^0$ u. s. w. Die Seitenkanten sind $\parallel \Pi_3$; sie erscheinen daher in dritter Projektion in wahrer Größe; man mache also im Netz $A_3 A_1 \perp A_3 B_3$ und $= A_3'' A_1''$. — Kontrolle: die mit $A_1 B_1$ bezeichneten Strecken in Netz und Grundriß müssen übereinstimmen.

52. Zur Bestimmung der ebenen Schnitte von Prismen und Pyramiden kann außer dem allgemein gültigen Kantenverfahren noch das Flächenverfahren benutzt werden, welches unmittelbar die Schnittlinien der Ebene mit den Flächen des Körpers, also Seiten der Schnittfigur, liefert:

Aufgabe. Den Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einer Pyramide zu konstruieren, deren Grundfläche $ABCDE$ in Π_1 liegt. Man lege durch die Spitze S der Pyramide eine Hilfsebene $\Sigma \parallel \Pi_1$. Diese schneidet E in einer ersten Hauptlinie m ($m' \parallel e_1$) und die Seitenfläche SAB in der Geraden $SW \parallel AB$. Sind V und W bzw. die Schnittpunkte von AB und e_1 , sowie von SW und m , so ist VW die Schnittlinie der Ebenen SAB und E ; die Kanten SA und SB begrenzen auf ihr die Seite $A_1 B_1$ der Schnittfigur.

Die Figuren $ABC \dots$ und $A_1 B_1 C_1 \dots$ stehen in folgender Beziehung: Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt (S), und die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden (e_1). Solche Figuren nennt man — wie hier nur beiläufig erwähnt werden soll — perspektiv kollinear. Der Punkt S heißt Kollineationszentrum, die Gerade e_1 Kollineationsachse (vergl. später 167).

Die wahre Größe der Schnittfigur ergibt sich nach 43 (erste Lösung) durch Umlegung in Π_1 .

Um das Netz der Pyramide zu konstruieren, bestimmt man zunächst die wahren Längen der Seitenkanten und der auf ihnen liegenden Abschnitte, indem man auf x z. B. die Strecke $S_x A_0 = S' A$ macht und $A_1' A_{10} \parallel x$ bis $S'' A_0$ zieht, und zeichnet dann das Dreieck SAB aus seinen drei Seiten, heftet an SB das Dreieck $SB C$ u. s. w. Man kann aber auch jede Seitenfläche einzeln um ihre Grundkante in Π_1 umlegen (35).

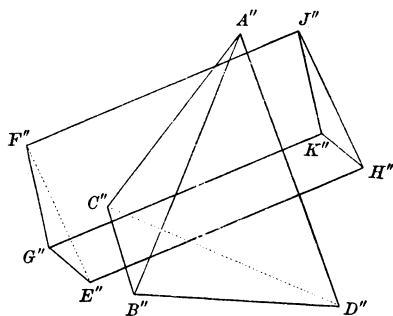
Durchdringung zweier Vielflache.

53. Zwei Vielflache durchschneiden sich entweder in einem oder in mehreren (ebenen oder windschiefen) Vielecken. Im ersten Falle sagt man, die Vielflache dringen ineinander ein, im zweiten spricht man von einer vollständigen Durchdringung (Durchbohrung) des einen Vielflachs durch das andere.

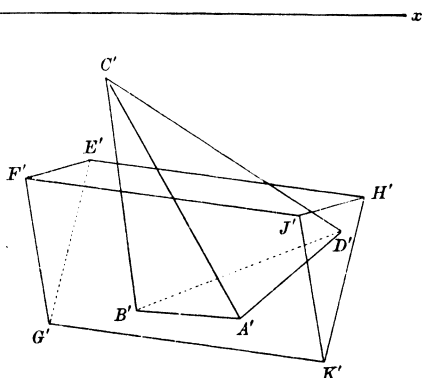
Um die Durchdringungsfigur zu konstruieren, bestimmt man in der Regel zunächst ihre Ecken als die Schnittpunkte der unverlängerten Kanten des einen Vielflachs mit den unerweiterten Flächen des anderen und verbindet dann immer zwei solche Eckpunkte miteinander, die in jedem Vielflach derselben Fläche angehören (Kantenverfahren). In gewissen Fällen findet man aber auch unmittelbar die Seiten der gesuchten Figur als die Schnittlinien der Flächen des einen Vielflachs mit den Flächen des anderen (Flächenverfahren).

Bei Anwendung des Kantenverfahrens legt man durch die einzelnen Kanten geeignete Hilfsebenen und ermittelt für jede solche Ebene ihren Schnitt mit dem anderen Vielflach und hierauf die Punkte, in denen die betreffende Kante das so erhaltene Vieleck schneidet. Als Hilfsebenen dienen im allgemeinen die projizierenden Ebenen der Kanten.

Fig. 5.



54. Aufgabe. Die Durchdringung des Tetraeders $ABCD$ mit dem dreiseitigen Prisma $EF'GHJK$ zu konstruieren (Fig. 5). Wir lösen die Aufgabe nach dem Kantenverfahren mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Kanten. Um z. B. die Schnittpunkte der Tetraederkante AB mit dem Prisma zu bestimmen, benutzen wir die zweite projizierende Ebene von AB . Diese schneidet die Prismakanten EH , FJ , GK bzw. in den Punkten 1, 2, 3. ($1'' = A''B'' \times E''H''$ u. s. w.) Die Strecke $A'B'$ hat mit den Seiten $2'3'$ und $3'1'$ des Dreiecks $1'2'3'$ bzw. die Punkte L' und M' gemein; die Kante AB durchstößt also die Prismflächen $F'GKJ$ und $G'E'HK$ bzw. in L und M . — In derselben Weise verfahren wir der Reihe nach mit allen Tetraeder- und Prismakanten, diejenigen ausgenommen,



bei denen die bloße Anschauung zeigt, daß sie ganz außerhalb des anderen Vielfachs liegen.

Wir haben schließlich unter den gefundenen Schnittpunkten immer je zwei, die auf derselben Tetraederfläche und zugleich auf derselben Prismafläche liegen, zu einer Seite der Schnittfigur zu verbinden. Dazu bedienen wir uns zweckmäßig einer Tabelle, in der wir neben jedem Schnittpunkte die Flächen notieren, in denen er sich befindet:

| Punkte | Prismaflächen | Tetraederflächen |
|--------|---------------|------------------|
| L | $FGKJ$ | ABC, ABD |

u. s. w.

Bei diesem Verfahren kann es sich ereignen, daß die projizierende Ebene, die wir durch eine bestimmte Kante (z. B. FJ) legen, den anderen Körper in einem Vieleck schneidet, das von der Kante gar nicht getroffen wird; dann zeigt sich erst hierdurch, daß die betrachtete Kante überhaupt keinen Eckpunkt der Durchdringungsfigur enthält. Um solche erfolglosen Versuche zu vermeiden, können wir, nachdem für eine Kante, etwa AB , wie vorhin die Schnittpunkte L und M bestimmt sind, in folgender Weise vorgehen. Da der Punkt M in der Prismafläche $GEHK$ und in der Tetraederfläche ABC liegt, so beginnt in ihm die Schnittlinie dieser Flächen, und wir finden sie, indem wir noch eine Kante der einen Fläche mit der anderen zum Schnitt bringen. Benutzen wir hierzu z. B. die Kante EH und konstruieren nach 27 ihren Schnittpunkt W mit der Ebene ABC , so ergibt sich MW als Schnittlinie beider Flächen. Diese gehört aber der Durchdringungsfigur nur so weit an, als sie sich innerhalb des Dreiecks ABC befindet, also bis zu ihrem Schnittpunkte S mit der Kante BC . Da BC auch im Dreieck BCD liegt, so beginnt in S die Schnittlinie dieser Fläche mit $GEHK$, von der wir wieder einen zweiten Punkt ermitteln, u. s. w. Auf diese Weise erhalten wir die Eckpunkte der Durchdringungsfigur sofort in der richtigen Reihenfolge, so daß die Anlegung einer Tabelle überflüssig wird.

Die Projektion einer Seite der Durchdringungsfigur ist als sichtbar auszuziehen, wenn beide Flächen, deren Schnittlinie sie ist, in der betreffenden Projektion sichtbar sind.

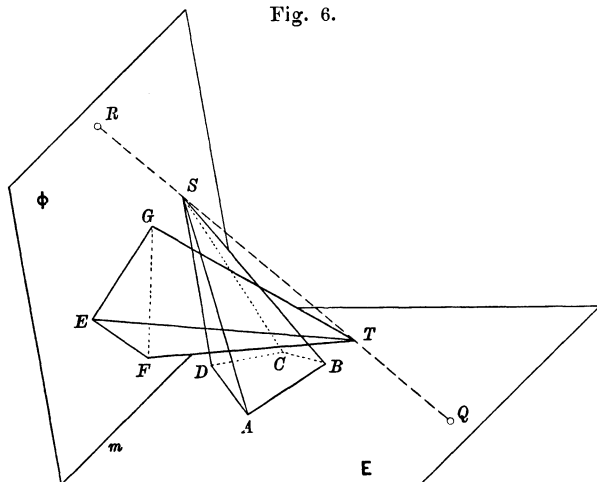
Kontrollen: Die beiden Schnittlinien einer Fläche des einen Körpers mit zwei in einer Kante zusammenhängenden Flächen des anderen treffen sich immer auf dieser Kante.

55. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Pyramiden, so können wir die Konstruktion nach dem Kantenverfahren dadurch vereinfachen, daß wir an Stelle der bisher benutzten projizierenden Ebenen zweckmäßiger gewählte Hilfsebenen verwenden. Bei einer Pyramide werden nämlich die einfachsten Schnitte durch solche Ebenen erzeugt, die durch die Spitze gehen, denn diese schneiden die Mantelfläche in Geraden aus der Spitze. Um daher die Schnittpunkte

der Kanten der einen Pyramide mit der anderen zu konstruieren, legen wir durch jede Kante eine Hilfsebene, die zugleich die Spitze der anderen Pyramide enthält, d. h. wir benutzen Hilfsebenen durch die Verbindungslinie beider Spitzen.

Sind S und T die Spitzen der beiden Pyramiden, $ABCD$ und EFG bzw. die zugehörigen Grundflächen in den Ebenen E und Φ , so bestimmen wir zunächst die Schnittlinie m dieser Ebenen, sowie die Schnittpunkte Q und R der Geraden ST mit E und Φ (Fig. 6). Dann erhalten wir z. B. die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Kante SA mit der anderen Pyramide, indem wir durch SA und ST eine Hilfsebene legen. Diese schneidet E in QA , m in \mathfrak{A} (auf QA), Φ in $\mathfrak{A}R$, das Dreieck EFG in \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 (auf $\mathfrak{A}R$), also den Mantel der zweiten Pyramide in den Geraden \mathfrak{A}_1T und \mathfrak{A}_2T , welche auf SA die Punkte A_1 und A_2 bestimmen. Haben wir in derselben Weise alle übrigen Eckpunkte der Durchdringungsfigur gefunden, so erkennen

Fig. 6.



wir ihre Reihenfolge ohne Benutzung einer Tabelle, indem wir von A und \mathfrak{A}_1 aus beide Grundflächen derartig umfahren, daß die in ihnen gleichzeitig erreichten Punkte immer in derselben Hilfsebene liegen.

Rückt der Punkt T in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die zugehörige Pyramide in ein Prisma. Dann bleibt die vorige Konstruktion ungeändert, nur werden die Geraden ST , \mathfrak{A}_1T , \mathfrak{A}_2T ... parallel zu den Seitenkanten des Prismas.

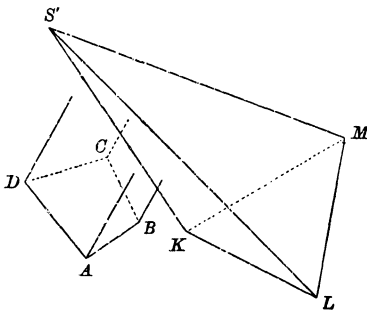
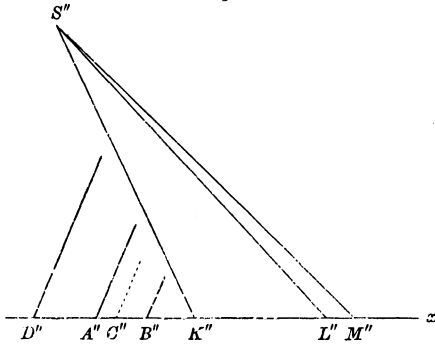
Nach ganz demselben Verfahren ermitteln wir endlich auch die Durchdringung zweier Prismen, indem wir durch die Seitenkanten jedes Prismas Hilfsebenen legen parallel zu denen des anderen (22 c). Alle diese Ebenen schneiden E und Φ in parallelen Geraden.

56. Aufgabe. Die Durchdringung eines Prismas mit einer Pyramide zu konstruieren, wenn die zugehörigen Grundflächen $ABCD$ und KLM in Π_1 liegen (Fig. 7, a. f. S.). Erste Lösung (Kantenverfahren): Wir ziehen durch die Spitze S

der Pyramide parallel zu den Seitenkanten des Prismas die Gerade SQ bis Π_1 und konstruieren dann genau so, wie in 55 angegeben wurde.

Zweite Lösung (Flächenverfahren, vergl. 52): Eine horizontale Ebene durch S schneidet das Prisma in einem Viereck $EFGH$,

Fig. 7.



das zu $ABCD$ parallel und kongruent ist, und die Seitenflächen der Pyramide in drei durch S gehenden Geraden $p \parallel KL$, $q \parallel LM$, $r \parallel MK$. Um z. B. die Schnittlinie der Flächen $ABFE$ und SKL zu ermitteln, bestimmen wir die Punkte $T = AB \times KL$ und $U = EF \times p$; dann ist TU die gesuchte Schnittlinie, die aber als Seite der Durchdringungsfigur nur so weit in Betracht kommt, als sie innerhalb der begrenzten Seitenflächen liegt, also von ihrem Schnittpunkte A_1 mit AE bis K_1 auf SK . In A_1 wird sich die Schnittlinie der Flächen $ADHE$ und SKL anschließen u. s. w.

Soll die Seite A_1K_1 der Durchdringungsfigur in das Netz der Pyramide eingetragen werden, so benutzen wir wieder die Punkte T auf KL und U auf p ($SU \parallel KL$ und $= S'U'$).

Schattenkonstruktionen.

57. Um die Anschaulichkeit der Abbildung zu erhöhen, denken wir uns die dargestellten Objekte aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkte L beleuchtet. Während in Bezug auf L als Projektionszentrum (Auge) die Oberfläche jedes undurchsichtigen Körpers in einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zerfällt, die durch den wahren Umriß getrennt werden, unterscheiden wir für L als Lichtquelle diese beiden Oberflächenteile als den beleuchteten und den im Eigen- oder Selbstschatten befindlichen Teil und bezeichnen ihre Trennungslinie, in deren Punkten die Lichtstrahlen die Oberfläche streifen (berühren), als Eigen- oder Selbstschattengrenze (Lichtgrenze). Die streifenden Lichtstrahlen umschließen hinter dem Körper seinen Schattenraum. Jede Oberfläche, die in diesen Raum hineinreicht, empfängt vom Körper einen Schlagschatten, dessen Grenzlinie von jenen streifenden Lichtstrahlen ausgeschnitten wird. Die Schlagschattengrenze ist also die Projektion der Eigen-

schattengrenze aus L und geometrisch dasselbe, wie der scheinbare Umriß des Körpers für L als Projektionszentrum.

Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, werden wir im folgenden immer voraussetzen, der Punkt L sei unendlich fern. Wir wählen ferner die parallelen Lichtstrahlen immer so, daß sie von links oben und vorn nach rechts unten und hinten gerichtet sind, und zwar zumeist parallel zur Diagonale eines Würfels, von welchem drei Kanten mit den Projektionsachsen x, y, z zusammenfallen. Diese bevorzugte Lichtrichtung soll kurz als „Richtung der Würfeldiagonale“ bezeichnet werden.

58. Aufgabe. Bei gegebener Lichtrichtung l (l', l'') den Schlagschatten zu bestimmen, den der Punkt P (P', P'') auf eine der Projektionsebenen wirft. Der Schlagschatten von P auf Π_1 oder Π_2 ist bezw. der erste oder zweite Spurpunkt des durch P gehenden Lichtstrahls (15); wir bezeichnen ihn im folgenden immer bezw. mit P_h oder P_v . Da die Projektionsebenen als unbegrenzt und undurchsichtig vorausgesetzt werden, so werfen zufolge der über die Lichtrichtung getroffenen Annahme (57) nur die im ersten Quadranten liegenden Punkte Schatten, und zwar entweder auf die $+\Pi_1$ oder die $+\Pi_2$. Für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale ist $P_h P_v \parallel x$.

59. Aufgabe. Den Schlagschatten der Strecke AB auf die Projektionsebenen zu konstruieren. Man konstruiere von den Endpunkten A und B den Schatten A_h und B_h auf Π_1 . Liegt A_h oberhalb, B_h unterhalb x und schneidet $A_h B_h$ die Achse in C , so ist der Schatten von AB die gebrochene Linie $A_v C B_h$.

Ist $AB \parallel \Pi_1$, so wird $A_h B_h \nparallel AB$. Steht $AB \perp \Pi_1$, so ist $A_h B_h \parallel l'$.

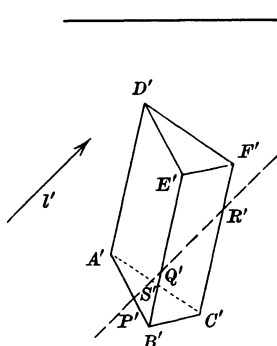
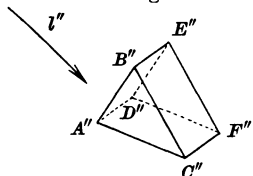
60. Um zu entscheiden, ob von einer ebenen Figur, etwa von einem Dreieck ABC , im Grundriß die beleuchtete oder die im Eigenschatten befindliche Seite gesehen wird, schneiden wir die Figur mit einer Ebene, die zur ersten projizierenden Ebene des Lichtstrahls l parallel ist, in einer Geraden DE ($D'E' \parallel l'$). Dann zeigt sich im Aufriß, ob die in der Hilfsebene verlaufenden ersten projizierenden Strahlen und die in ihr liegenden Lichtstrahlen dieselbe Seite von DE treffen, oder nicht. Im ersten Falle ist die im Grundriß sichtbare Seite der Ebene ABC beleuchtet. Konstruieren wir den Schlagschatten auf Π_1 , so sind in diesem Falle die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_h B_h C_h$ gleichen Sinnes (20).

Die Grundrißprojektion einer ebenen Figur und ihr Schatten auf Π_1 sind perspektiv affin (41).

61. Aufgabe. Den Schlagschatten des Prismas $ABCDEF$ auf die Projektionsebenen, sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 8, a. f. S.). Wir konstruieren zunächst den vollständigen Schlagschatten auf die Π_1 , so wie er sich gestalten würde, wenn die Π_2 durchsichtig wäre. Haben wir von den durch A, B, C, D gezogenen Lichtstrahlen die ersten Spurpunkte $A_h \dots$ ermittelt, so ergeben sich E_h und F_h sofort aus der Bemerkung, daß $B_h E_h$ und

$C_h F_h \nparallel A_h D_h$ sind. Denken wir uns nunmehr die Schatten aller derjenigen Eckpunkte verbunden, die auf dem Prisma selbst durch Kanten verbunden sind, so erhalten wir als Schlagschattengrenze das Fünfeck

Fig. 8.



die in ABC und $ABED$ liegenden Seiten SP und PQ sind dem Lichte zugewendet.

Die Punkte D und E werfen ihren Schlagschatten in Wirklichkeit nicht auf die Π_1 , sondern auf die Π_2 ; der Schlagschatten des Prismas wird also in den Schnittpunkten M und N von $A_h D$ und $B_h E_h$ mit x gebrochen. Die Figuren $MD_h E_h N$ und $MD_v E N$ sind perspektiv affin für x als Affinitätsachse.

62. Um den Schlagschatten einer Figur auf eine andere Figur zu bestimmen, können wir zwei verschiedene Wege einschlagen:

I. Wir bestimmen unmittelbar die Schnittpunkte der von den Schatten werfenden Punkten ausgehenden Lichtstrahlen mit den Schatten empfangenden Flächen unter Anwendung geeigneter Hilfsebenen, in der Regel mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Lichtstrahlen. (Direktes Verfahren, insbesondere Methode der projizierenden Ebenen, analog dem Kantenverfahren bei Durchdringungen, vergl. 53.)

II. Sind a und b zwei gerade (oder krumme) Linien im Raume, a_h und b_h ihre Schatten auf irgend eine Ebene, etwa auf die Π_1 , und treffen sich a_h und b_h in einem Punkte P_h , so ist dieser der Schatten sowohl eines Punktes von a als auch eines Punktes von b , d. h. der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl schneidet beide Linien. Trifft er zuerst a in P , hierauf b in Q , so empfängt a in P Schlagschatten vom Punkte Q auf b . — Um hiernach den Schlagschatten zu

$A_h C_h B_h E_h D_h$, das alle übrigen Verbindungslinien einschließt, und diesem entspricht auf dem Prisma die Eigenschattengrenze $ACBED$. Daß übrigens die Punkte C und D der Eigenschattengrenze angehören, ist ohne weiteres klar, weil in C' und D' der erste scheinbare Umriss von je einer Parallelen zu l' gestreift wird, und das Analoge gilt im Aufriss von A und E . Da der Kantenzug $ACBEDA$ die beleuchteten Prismaflächen von den im Eigenschatten befindlichen trennt, so ergibt sich aus der Anschauung, daß nur die Flächen ABC und $ABED$ beleuchtet sind. Davon überzeugen wir uns auch, indem wir das Prisma mit einer Hilfsebene schneiden, die zur ersten projizierenden Ebene von l parallel ist. Die so erhaltene Schnittfigur $PQRS$ wird von den durch Q und S gehenden Lichtstrahlen gestreift, und

konstruieren, den das Vielfach A vom Vielfach B empfängt, ermitteln wir zunächst den Schlagschatten beider Vielfache auf die Π_1 . Da nur die beleuchteten Flächen von A Schatten erhalten, und da die Grenzlinie dieses Schattens von der Eigenschattengrenze auf B herührt, so suchen wir in Π_1 die Schnittpunkte der Schlagschattengrenze von B mit den Schatten der beleuchteten Kanten von A (einschließlich der Schlagschattengrenze von A) und projizieren die gefundenen Punkte in der Lichtrichtung auf die betreffenden Kanten von A . (Indirektes Verfahren, Methode des Zurückprojizierens.)

IV. Der Kreis.

63. Sei E irgend eine Originalebene, k eine in ihr liegende Kurve, k' die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion von k auf die Ebene Π , so sind k und k' perspektiv affin für die Spurlinie e von E als Affinitätsachse (40). Dabei entspricht der Tangente in einem Punkte P von k die Tangente im Punkte P' von k' , denn beide Geraden sind die Verbindungslinien entsprechender Paare von unendlich benachbarten Punkten auf k und k' .

Den Schnittpunkten von k mit einer in E liegenden Geraden g sind der Reihe nach die Schnittpunkte von k' mit der Bildgeraden g' zugeordnet; daraus folgt: Die Projektion einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung ist wieder von der n^{ten} Ordnung.

64. Ist die Kurve k ein Kreis, so entsteht als Bildkurve k' eine im Endlichen geschlossene Kurve zweiter Ordnung, d. h. die Parallelprojektion des Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse.

Die Projektion M' des Kreismittelpunktes M ist der Mittelpunkt der Bildellipse; denn M' ist der Mittelpunkt der Projektionen aller Kreisdurchmesser (1). Zieht man in k zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, so ist jeder von ihnen parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des anderen. Dann gilt dasselbe von den entsprechenden Durchmessern von k' , d. h.: Zwei aufeinander senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen zwei konjugierte Ellipsendurchmesser.

65. Aufgabe. Von dem Kreise k ist die Spur e seiner Ebene, seine Umlegung k_0 in die Bildebene Π und von seinem Mittelpunkte M das Bild M' gegeben; die Achsen der Bildellipse k' zu konstruieren. Man bestimme den Schnittpunkt O von e mit der Mittelsenkrechten von M_0M' , beschreibe um O mit dem Radius OM_0 einen Kreis, der e in V und W schneidet, und ziehe in k_0 die nach V und W gehenden Durchmesser A_0B_0 und C_0D_0 . Ihnen entsprechen in der perspektiv affinen Figur auf $M'V$ und $M'W$ die Achsen $A'B'$ und $C'D'$ von k' ; denn $A'B'$ und $C'D'$ sind zwei aufeinander senkrechte, konjugierte Durchmesser der Bildellipse.

Im Falle senkrechter Projektion ist $M_0M' \perp e$; dann ist die große Achse von $k' \parallel e$ und gleich dem Durchmesser von k_0 .

66. Sind von der Ellipse k zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegeben, und beschreibt man über dem einen

derselben, z. B. über AB , um den Mittelpunkt M von k den Kreis k_0 , so kann man k als die perspektiv affine Kurve zu k_0 betrachten für AB als Affinitätsachse. Dabei entspricht dem Ellipsendurchmesser CD der auf AB senkrechte Kreisdurchmesser C_0D_0 ; die Affinitätsstrahlen sind also $\parallel C_0C$. Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion der Ellipse k : Man falle von einem beliebigen Punkte P_0 von k_0 auf AB das Lot P_0Q und ziehe $QP \parallel MC$ und $P_0P \parallel C_0C$; dann ist P ein Punkt von k , denn der zu k_0 gehörenden Geraden P_0Q entspricht in der affinen Figur die Gerade PQ .

Die Ellipsentangente in P geht durch den Schnittpunkt der Kreistangente in P_0 mit der Affinitätsachse AB .

Ist von einer Ellipse ein Durchmesser AB , die Richtung des konjugierten Durchmessers und ein Punkt P gegeben, so findet man aus der eben betrachteten Figur umgekehrt die Länge des konjugierten Durchmessers.

Die affine Beziehung zwischen der Ellipse k und dem Kreise k_0 liefert ein bequemes Mittel, um eine Reihe von Konstruktionsaufgaben über die Ellipse durch Zurückführung auf die analoge Aufgabe am Kreise zu lösen. Sollen z. B. an die durch zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegebene, aber nicht gezeichnete Ellipse k aus einem beliebigen Punkte R der Ebene Tangenten gezogen werden, so konstruiere man zu R den in der Kreisfigur entsprechenden Punkt R_0 ($RS \parallel CM$ bis AB , $SR_0 \perp AB$, $RR_0 \parallel CC_0$), lege aus R_0 an den Kreis k_0 die Tangenten und verbinde R mit den Punkten, in denen jene die Affinitätsachse AB schneiden.

67. Konstruktion der Ellipse aus ihren Achsen $AB = 2a$ und $CD = 2b$ ($a > b$). Die Ellipse k ist wieder perspektiv affin zu dem Kreise, der AB zum Durchmesser hat; wir bezeichnen ihn gegenwärtig mit k_1 . Dem Punkte C von k entspricht der Schnittpunkt C_1 von k_1 mit der verlängerten Halbachse MC ; einem beliebigen Punkte P_1 von k_1 ist also nach 66 derjenige Punkt P von k zugeordnet, der die auf AB senkrechte Strecke P_1Q in demselben Verhältnis teilt, wie C die Strecke C_1M . Beschreiben wir daher um M mit dem Radius MC den Kreis k_2 , der MP_1 in P_2 schneidet, so erhalten wir P als Schnittpunkt von P_1Q mit der Parallele durch P_2 zu AB .

Verstehen wir unter k_3 den Kreis um M mit dem Radius $a + b$, unter P_3 seinen Schnittpunkt mit MP_1 , so ist PP_3 die Normale der Ellipse in P . Denn die Tangente von k in P geht durch den Schnittpunkt V von AB mit der Tangente von k_1 in P_1 ; dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1PP_2 und VP_1M , daß auch die Dreiecke PP_2P_3 und PP_1V einander ähnlich sind, mithin ist $\angle P_3PP_2 = \angle VPP_1$, also $\angle VPP_3 = 90^\circ$.

Sind R und S die Schnittpunkte von AB und CD mit der Parallele durch P zu MP_1 , so ist $PR = b$, $PS = a$. Gleitet daher die Strecke $RS = a - b$ mit den Punkten R und S auf den Achsen AB und CD , so beschreibt der auf ihrer Verlängerung liegende Punkt P die Ellipse. — Machen wir ferner auf AB die Strecke $QT = RQ$ und ziehen TP bis U auf CD , so wird $PU = a$, $PT = b$; die Ellipse

entsteht also auch als Bahnkurve von P , wenn die Endpunkte der Strecke $TU = a + b$ sich bezw. auf AB und CD bewegen. (Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse.)

Hieraus folgt beiläufig: Kennen wir von einer Ellipse die eine Achse $AB = 2a$ und einen beliebigen Punkt P , so finden wir die Länge b der anderen Halbachse, indem wir um P mit a einen Kreisbogen beschreiben. Trifft dieser die nicht gegebene Achse in S , und schneiden sich PS und AB in R , so ist $PR = b$.

Um die Ellipse möglichst genau zu zeichnen, benutzen wir noch ihre Scheitelkrümmungskreise. Bilden wir das Rechteck $AMCE$ und fällen von E auf AC ein Lot, so trifft dieses AB und CD bezw. in den Krümmungsmittelpunkten F und G der Scheitel A und C . Dann ist nämlich $AF = \frac{b^2}{a}$ und $CG = \frac{a^2}{b}$ in Übereinstimmung mit bekannten Formeln der analytischen Geometrie.

68. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser. Wir bezeichnen wieder mit M den Mittelpunkt, mit AB und CD die Achsen einer Ellipse k , mit k_1 und k_2 die Kreise über den Durchmessern AB und CD . In k_1 wählen wir irgend zwei aufeinander senkrechte Radien ME_1 und MG_1 , schneiden sie mit k_2 in E_2 und G_2 und bestimmen nach 67 zu E_1 und G_1 die entsprechenden Ellipsenpunkte E und G ($E_1E \perp AB$, $E_2E \parallel AB$ u. s. w.). Dann sind ME und MG zwei konjugierte Halbmesser von k , und es ist $\angle E_1EE_2 \cong \angle G_2GG_1$. Drehen wir $\angle MG_1G$ um M , bis G_1 mit E_1 , also G_2 mit E_2 zusammenfällt, so gelangt MG nach $MJ \perp MG$. In dem Rechteck E_1EE_2J halbieren sich die Diagonalen in O ; sind also S und T die Schnittpunkte von EJ mit AB und CD , so ist $OS = OT = OM$ und $ME_1 = JS = MA$, sowie $ME_2 = JT = MC$.

Kennen wir daher umgekehrt von der Ellipse k die konjugierten Durchmesser EF und GH , so finden wir die Achsen in folgender Weise: Wir ziehen $MJ \perp MG$ und beschreiben um den Mittelpunkt O von EJ mit OM einen Kreisbogen, der EJ in S und T schneidet. Dann gehen die Achsen AB und CD bezw. durch S und T , und zwar ist $MA = JS$, $MC = JT$.

69. Aufgabe Einen Kreis k in Grund- und Aufriß darzustellen, wenn gegeben ist die erste Spurlinie e_1 und der erste Neigungswinkel ε_1 seiner Ebene E , die erste Projektion M' seines Mittelpunktes M und sein Radius r . Die erste Projektion von k ist eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkt M' . Alle Durchmesser von k erscheinen im Grundriß verkürzt, mit Ausnahme des zu e_1 parallelen Durchmessers AB , der in wahrer Größe abgebildet wird. Ziehen wir also durch M' die Gerade $A'B' \parallel e_1$ und machen $M'A' = M'B' = r$, so ist $A'B'$ die große Achse von k' . Die zugehörige kleine Achse ist die Grundrißprojektion des auf AB senkrechten Kreisdurchmessers CD . Dieser geht durch den Fußpunkt J des Lotes von M' auf e_1 und bildet mit $M'J$ den Winkel ε_1 . Durch Umlegung in Π_1 gelangt der Winkel MJM' nach $M_0JM' = \varepsilon_1$ und

M nach M_0 auf $A'B'$; machen wir dann auf JM_0 die Strecke $M_0C_0 = r$, so ist $C_0C' \perp JM'$.

Die Aufrißprojektion von k ist eine Ellipse k'' mit dem Mittelpunkt M'' , wobei $\text{Abst.}(M'', x) = M'M_0$. Der zu Π_2 parallele Kreisdurchmesser EF liefert die große Achse von k'' ; um sie zu erhalten, ziehen wir $M'N \parallel x$ bis e_1 , $NN'' \perp x$ und machen auf $M''N''$ die Strecke $M''E'' = M''F'' = r$. Von der Ellipse k'' kennen wir ferner den Punkt A'' auf der Parallelen durch M'' zu x ; wir finden also die kleine Halbachse nach 67.

Der Schlagschatten von k auf Π_1 ist eine Ellipse k_h , die den Schatten M_h von M zum Mittelpunkt hat. Bilden wir von k die Umlegung in Π_1 , so finden wir die Achsen von k_h nach 65.

V. Die Kugel.

70. Im Anschluß an früher gebrauchte Bezeichnungen verstehen wir bei einer krummen Fläche unter **wahrem Umriß** den geometrischen Ort derjenigen Flächenpunkte, deren projizierende Strahlen die Fläche berühren, unter **scheinbarem Umriß** die Projektion der wahren Umrißlinie.

Darstellung einer Kugel, die durch ihren Mittelpunkt M (M' , M'') und ihren Radius r gegeben ist. Der erste wahre Umriß der Kugel ist der horizontale Hauptkreis u , der erste scheinbare Umriß der Kreis u' um M' mit dem Radius r . Die zweite Projektion von u fällt zusammen mit dem zu x parallelen Durchmesser des zweiten scheinbaren Umrisses v'' . Alle Punkte der oberhalb u liegenden Halbkugel sind im Grundriß sichtbar.

Um von dem Punkte P der Kugelfläche, der durch seinen Grundriß P' gegeben ist, die Aufrißprojektion zu konstruieren, benutzen wir den durch P gehenden horizontalen Kugelkreis p . Seine Grundrißprojektion ist der Kreis p' um M' mit dem Radius $M'P'$. Dem Punkte Q' , in welchem p' die Grundrißprojektion v' des zweiten wahren Umrisses v schneidet, entsprechen im Aufriß zwei Punkte von v'' ; von den zugehörigen horizontalen Sehnen kann jede als Aufrißprojektion von p betrachtet werden.

71. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einer Kugel vom Mittelpunkte M (M' , M'') zu konstruieren. Die Schnittkurve ist ein Kreis k , der den Fußpunkt O des von M auf E gefällten Lotes zum Mittelpunkt hat. Wie beim ebenen Schnitt eines Vielflachs bedienen wir uns einer dritten Projektionsebene Π_3 , die auf e_1 senkrecht steht und Π_1 in der Geraden $y \perp e_1$ schneidet, und bestimmen in der umgelegten Π_3 die dritte Spurlinie e_3 (43), sowie den Punkt M''' und den dritten scheinbaren Umriß w''' der Kugel. Die auf e_3 liegende Sehne $C'''D'''$ des Kreises w''' ist die dritte Projektion und zugleich die wahre Größe des auf e_1 senkrechten Durchmessers von k , sowie die dritte Projektion des Schnittkreises selbst. Um die Projektionen des Mittelpunktes O zu erhalten, ziehen wir $M'''O''' \perp e_3$, $M'O' \perp e_1$, $O'''O' \parallel e_1$, $M''O'' \perp e_2$. Die Grundrißprojektion von k ist

eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkte O' , der kleinen Achse $C'D' \perp e_1$ und der großen Achse $A'B' = 2 \cdot O'''C'''$. Die große Achse der Ellipse k'' ist $\parallel e_2$ und ebenfalls $= 2 \cdot O'''C'''$; die zugehörige kleine Achse ergibt sich nach 67 mittels des Punktes A'' ($O''A'' \parallel x$).

Die Konstruktion gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn wir die Ebene Π_3 durch M legen und sie um den in ihr befindlichen horizontalen Kugeldurchmesser drehen, bis sie $\parallel \Pi_1$ wird.

Die Ebene des ersten wahren Umrisses u schneidet E in einer ersten Hauptlinie h , und diese trifft u in T und U , den Endpunkten des im Grundriß sichtbaren Teiles von k . Die Ellipse k' berührt den Kreis u' in T' und U' , denn die Tangenten an k und u in T liegen in der Berührungsebene der Kugel in T , die auf Π_1 senkrecht steht, und deren erste Projektion mit der Tangente in T' an u' zusammenfällt. — Überhaupt gilt ganz allgemein der Satz: Liegt auf irgend einer krummen Fläche eine Kurve k , die den wahren Umriß u in einem Punkte T schneidet, so berührt ihre Projektion k' den scheinbaren Umriß u' in T' .

72. Aufgabe. Den Schnitt des Dreiecks ABC mit einer Kugel vom Mittelpunkte M zu konstruieren. Wir bestimmen eine hinreichende Anzahl von Punkten des Schnittkreises k , indem wir durch Kugel und Dreieck eine Reihe horizontaler Hilfsebenen legen. Eine solche Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise p , das Dreieck in einer Geraden ST , und diese trifft p im allgemeinen in zwei Punkten P und Q von k . Dabei kommen nur solche Punkte in Betracht, die innerhalb der begrenzten Dreiecksfläche liegen.

Um die Schnittpunkte D und E der Geraden AB mit der Kugel zu erhalten, schneiden wir die Kugel mit der ersten projizierenden Ebene von A in einem Kreise i , dessen erste Projektion mit der auf $A'B'$ liegenden Sehne $I'I'$ des Umrißkreises u' zusammenfällt. Sein Mittelpunkt O ist der Fußpunkt des Lotes von M auf diese Ebene, also von Π_1 ebenso weit entfernt wie M . Legen wir die Ebene $ABB'A'$ in Π_1 um, so gelangen AB , O , i bezw. nach A_0B_0 , O_0 , i_0 ; dabei ist $A'A_0 \perp A'B'$ und $= \text{Abst.}(A'', x)$, $M'O_0 \perp A'B'$, $O'O_0 = \text{Abst.}(M'', x)$ und der Radius von $i_0 = O'I'$. Die Gerade A_0B_0 trifft i_0 in D_0 und E_0 u. s. w.

73. Aufgabe. Die Eigenschattengrenze einer Kugel für Parallelbeleuchtung zu konstruieren. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt, mit u und v den ersten und zweiten Umriß der Kugel, mit l den durch M gehenden Lichtstrahl. Die gesuchte Eigenschattengrenze ist ein Hauptkreis s , dessen Ebene auf l senkrecht steht, ihre erste Projektion also eine Ellipse s' mit dem Mittelpunkte M' . Da alle Durchmesser von s im Grundriß verkürzt erscheinen, mit Ausnahme des horizontalen, also in u liegenden Durchmessers AB , so ist die auf l' senkrechte Strecke $A'B'$ die große Achse von s' . Die zugehörige kleine Achse ist demnach die Grundrißprojektion desjenigen Durchmessers CD von s , der sich in der ersten projizierenden Ebene von l befindet. Diese schneidet die Kugel in einem Hauptkreise i , von welchem l und CD zwei aufeinander senkrechte Durchmesser sind. Um $C'D'$

zu konstruieren, drehen wir den Kreis i um den vertikalen Kugeldurchmesser, bis er mit v zusammenfällt. Dabei beschreibt der auf l beliebig gewählte Punkt L einen horizontalen Kreisbogen bis L_0 ($M'L_0 \parallel x$ und $= M'L$, $L''L_0'' \parallel x$). Dann ist $M''L_0''$ die Aufrißprojektion l_0'' des gedrehten Lichtstrahles; ziehen wir also in v'' den Radius $M''C_0'' \perp l_0''$ als Aufrißprojektion der gedrehten Strecke MC , so finden wir auf v' den Punkt C_0' und auf v' den Punkt C' ($M'C' = M'C_0'$).

Die Aufrißprojektion von s ist eine Ellipse, die den auf l'' senkrechten Durchmesser von v'' zur großen Achse hat. Sie geht ferner durch den Punkt A'' auf u'' , wodurch die kleine Achse nach 67 bestimmt ist.

Die Projektion der Eigenschattengrenze berührt den scheinbaren Umriß in denjenigen Punkten, deren Tangenten zur Projektion des Lichtstrahles parallel sind. Dies gilt allgemein für jede krumme Fläche; denn trifft die Eigenschattengrenze s einer solchen Fläche den wahren Umriß u im Punkte A , so liegen der durch A gehende Lichtstrahl und die zugehörigen Tangenten von u und s in der Berührungsebene von A , und da diese auf der betreffenden Projektionsebene senkrecht steht, so fällt ihre Projektion mit der des Lichtstrahles zusammen.

Die Grenze des Schlagschattens der Kugel auf Π_1 ist der Schatten von s , also eine Ellipse s_h vom Mittelpunkte M_h . Da die Durchmesser von s auf der Lichtrichtung senkrecht stehen, so erscheinen sie im Schatten vergrößert, mit Ausnahme des zu Π_1 parallelen Durchmessers AB . Die kleine Achse von s_h ist also $A_hB_h \nparallel A'B'$, die große Achse folglich C_hD_h . Ziehen wir $C_0''N_0'' \parallel l_0''$ bis zur Parallelen durch M'' zu x , so ist $M_hC_h = M''N_0''$.

VI. Kegel- und Zylinderflächen.

Raumkurven und abwickelbare Flächen im allgemeinen.

Entstehung der Kegel- und Zylinderflächen.

74. Unter der Schmiegungeebene einer Raumkurve k im Punkte P verstehen wir die Grenzlage Σ , der sich die Verbindungsebene der Tangente in P mit einem veränderlichen Kurvenpunkte nähert, wenn dieser dem Punkte P zustrebt. Wir können die Schmiegungeebene auch definieren als die Ebene durch drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte P, P_1, P_2 oder durch zwei unendlich benachbarte Tangenten $t = PP_1$ und $t_1 = P_1P_2$. Die Kurve k durchsetzt im allgemeinen die Ebene Σ im Punkte P , weil dieser aus der Vereinigung von drei aufeinander folgenden Schnittpunkten hervorgeht. — In Σ befindet sich der Krümmungskreis des Punktes P , d. h. der Kreis durch P, P_1, P_2 .

Verzeichnen wir auf k von P_2 aus weiter die unendlich benachbarten Punkte $P_3, P_4 \dots$, so sind die Geraden $t_2 = P_2P_3, t_3 = P_3P_4 \dots$ die Tangenten von k in $P_2, P_3 \dots$, und dann bilden die unendlich schmalen ebenen Streifen, die zwischen je zwei Nachbartangenten enthalten sind, in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche, die Tangentenfläche der Raumkurve k . Sie ist abwickelbar, d. h.

wir können sie ohne Trennung des Zusammenhanges und ohne Faltung in eine Ebene ausbreiten, wie sich sofort ergibt, wenn wir den ersten Elementarstreifen tt_1 durch eine unendlich kleine Drehung um t_1 in die Ebene des folgenden t_1t_2 bringen, dann beide vereinigt in die Ebene des dritten überführen u. s. w.

Die Tangenten der Raumkurve heißen die Erzeugenden oder Mantellinien ihrer Tangentenfläche. Ihre Schmiegungebenen sind die Berührungsebenen der Fläche, und zwar berührt jede die Fläche längs der zugehörigen Erzeugenden; denn jede Gerade, die z. B. in der Schmiegungeebene Σ beliebig gezogen wird, hat mit der Fläche die beiden unendlich benachbarten Punkte gemein, in denen sie t und t_1 schneidet, ist also eine Tangente der Fläche.

75. Durch Bewegung einer Geraden entsteht eine geradlinige Fläche oder Regelfläche. Bewegt sich die erzeugende Gerade so, daß je zwei unendlich benachbarte Lagen sich schneiden, so ist die Fläche abwickelbar (74); im entgegengesetzten Falle heißt sie windschief.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine (unbegrenzte) Gerade sich so bewegt, daß sie beständig durch einen festen Punkt S geht und eine gegebene Kurve k fortwährend schneidet. Die sämtlichen Lagen der erzeugenden Geraden heißen Mantellinien; S wird die Spitze oder der Mittelpunkt, k die Leitkurve der Kegelfläche genannt.

Rückt der Punkt S in unendliche Entfernung, bleibt also die Erzeugende zu ihrer Anfangslage parallel, so verwandelt sich die Kegelfläche in eine Zylinderfläche.

Jede Kegel- oder Zylinderfläche kann als Mantel einer Pyramide bzw. eines Prismas mit unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen aufgefaßt werden. Sie ist also abwickelbar und wird von jeder Berührungsebene in allen Punkten einer Mantellinie berührt. Aus dieser Auffassung ergibt sich ferner: Alle Parallelschnitte einer Kegelfläche sind einander ähnlich. Alle Parallelschnitte einer Zylinderfläche sind kongruent.

Darstellung der Zylinder- und Kegelflächen.

Berührungsebenen u. s. w.

76. Darstellung eines schiefen Kreiszylinders, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt und dessen Mantellinien parallel sind zu einer durch den Mittelpunkt M von k gehenden Geraden a . Die Mantellinien, deren Berührungsebenen auf Π_1 senkrecht stehen, bilden den ersten wahren Umriß; ihre Grundrißprojektionen sind Tangenten an $k \parallel a'$. Die zweiten Umrißmantellinien gehen durch die Endpunkte des zu x parallelen Durchmessers von k .

Um zu einem Punkte P der Zylinderfläche, von welchem die Grundrißprojektion P' gegeben ist, die Aufrißprojektion zu ermitteln, ziehen wir durch P' die Gerade $p' \parallel a'$ und zeichnen im Aufriß die beiden Mantellinien, deren Grundrißprojektionen mit p' zusammenfallen.

Aufgabe. An den dargestellten Zylinder Berührungsebenen zu legen, parallel zu einer gegebenen Geraden l . Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt S von a die Gerade $ST \parallel l$ bis Π_1 , so sind die gesuchten Berührungsebenen E und Φ parallel zur Ebene MST ; ihre ersten Spurlinien e_1 und f_1 sind also die zu MT parallelen Tangenten von k . Durch die Berührungspunkte derselben gehen die Berührungsmantellinien g und h . — Für Licht in der Richtung l sind g und h die Grenzen des Eigenschattens, e_1 und f_1 diejenigen des Schlagschattens auf Π_1 .

77. Darstellung eines schiefen Kreiskegels, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Ist S die Spitze des Kegels, so besteht sein erster scheinbarer Umriß aus den Tangenten von S' an k . Dieser Umriß ist also nicht vorhanden, wenn S' innerhalb k liegt; dann hat der Kegel keine auf Π_1 senkrechten Berührungsebenen.

Die Berührungsebenen des Kegels aus dem gegebenen Punkte L gehen durch die Gerade LS , die Π_1 in T schneidet; ihre Grundrißspuren sind also die Tangenten aus T an k . Die zugehörigen Berührungsmantellinien bilden die Eigenschattengrenze des Kegels für Beleuchtung aus L .

Um die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Kegel-
fläche zu konstruieren, legen wir durch g und S eine Hilfsebene Δ . Zu dem Zwecke ziehen wir durch S die Gerade $h \parallel g$ und bestimmen von g und h die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 , sowie von Δ die erste Spurlinie $d_1 = G_1 H_1$. Sind A und B die Schnittpunkte von k mit d_1 , so schneidet Δ die Kegel-
fläche in den Mantellinien SA und SB , und diese treffen g in den gesuchten Punkten P und Q .

78. Darstellung eines geraden Kreiskegels, von welchem die Spitze S , sowie der Mittelpunkt M und der Radius r des Grundkreises k gegeben sind. Wir konstruieren die Umrißlinien des Kegels mit Hilfe der Kugel, die dem Kegel in dem Kreise k eingeschrieben ist. Jede Ebene, die den Kegel in einer Mantellinie ST berührt, berührt diese Kugel in dem auf k liegenden Endpunkte T von ST . Steht nun die Berührungsebene auf einer Projektionsebene senkrecht, so ist ST eine Umrißlinie des Kegels und T ein Punkt auf dem Umriß der Kugel: dann berührt die betreffende Projektion von ST den scheinbaren Umriß der Kugel in der Projektion von T . Die scheinbaren Umrißlinien des Kegels sind also die Tangenten aus S' und S'' an die scheinbaren Umrisse der Kugel, und die zugehörigen Berührungspunkte liegen zugleich auf den Projektionen von k .

Ausführung. Die erste projizierende Ebene von SM schneidet den durch k begrenzten Kegel in einem gleichschenkligen Dreieck CSD . Legen wir sie in Π_1 um, so gelangt SM nach $S_0 M_0$ und C nach C_0 ($M_0 C_0 \perp S_0 M_0$ und $= r$). Ziehen wir $C_0 O_0 \perp S_0 C_0$ bis $S_0 M_0$, so ist O_0 der umgelegte Mittelpunkt und $O_0 C_0$ der Radius der Hilfskugel; ihre scheinbaren Umrisse sind also die Kreise h' und i'' mit $O_0 C_0$ um O' und O'' . An diese legen wir aus S' und S'' die Tangentenpaare

$S' T'$, $S' U'$ und $S'' V''$, $S'' W''$. — Die Projektionen von k ergeben sich nach 69.

Schnitt einer Zylinderfläche mit einer Ebene.

79. Aufgabe. Den Schnitt eines geraden Kreiszyklinders, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, mit einer auf Π_2 senkrechten Ebene E (e_1 , e_2) zu konstruieren. Wir erhalten als Schnittkurve eine Ellipse k_3 , deren Mittelpunkt M_3 sich auf der Zylinderachse $M_1 M_2$ befindet; ihre zweite Projektion ist die auf e_2 liegende Strecke $A_3'' B_3''$ zwischen den scheinbaren Umrißlinien $A_1'' A_2''$ und $B_1'' B_2''$. Da k_3 mit k_1 zusammenfällt, so entspricht jedem Durchmesser von k_1 ein größerer Durchmesser von k_3 , ausgenommen den zu e_1 parallelen Durchmesser $C_1 D_1$, dem in k_3 eine parallele und gleich große Strecke $C_3 D_3$, also die kleine Achse zugeordnet ist. Als große Achse ergibt sich demnach $A_3 B_3 \nparallel A_3'' B_3''$.

Abwicklung. Schneiden wir den Zylinder nach der Mantellinie $C_1 C_2$ auf und wickeln ihn in die Zeichenebene ab, so verwandelt er sich in ein Rechteck, dessen Grundlinie $C_1 C_1$ gleich der Peripherie von k_1 und dessen Höhe $= C_1 C_2$ ist. (Näherungsverfahren für die Rektifikation des Kreises k_1 : Wir ziehen durch M_1 eine Gerade, die mit $M_1 C_1$ einen Winkel von 30° bildet, schneiden sie in V mit der Tangente des Punktes C_1 und tragen auf dieser von V aus in der Richtung nach C_1 den Radius r des Kreises dreimal ab. Bezeichnet U den Endpunkt der so erhaltenen Strecke, so ist $UD_1 = r \cdot 3,14153 \dots$)

Die Ellipse k_3 verwandelt sich in der Abwicklung in eine aus vier kongruenten Teilen $C_3 B_3$, $B_3 D_3 \dots$ bestehende Kurve. Um sie zu konstruieren, legen wir durch $C_3 D_3$ eine Horizontalebene Σ , die den Zylinder in einem Kreise k , die Umrißlinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in A und B schneidet, und teilen den Quadranten $C_3 B$, im Grundriß also den Quadranten $C_1 B_1$ und in der Abwicklung die Strecke $C_3 B$, in eine hinreichende Anzahl gleicher Teile. Ist P ein solcher Teilpunkt, P_3 der Schnittpunkt von E mit der durch P gehenden Mantellinie, so machen wir in der Abwicklung die Strecke $PP_3 \parallel C_1 C_2$ und $= P'' P_3''$.

Die Tangente in P_3 an die Ellipse k_3 ist die Schnittlinie der Ebene E mit der Berührungsebene des Zylinders in P_3 . Die Berührungsebene schneidet Σ in der Tangente PT von k , und diese trifft $C_3 D_3$ im Punkte T , dessen Grundrißprojektion T' mit dem Schnittpunkte von $C_1 D_1$ und der Tangente in P' an k_1 zusammenfällt; dann ist $P_3 T$ die Tangente an k_3 . — Die Tangente an die verwandelte Kurve bildet mit der Geraden $P_3 P$ denselben Winkel, wie die Ellipsentangente mit der entsprechenden Mantellinie; wir erhalten sie also, indem wir das rechtwinklige Dreieck $P_3 P T$ in der Abwickelfigur an $P_3 P$ wieder anheften ($PT = P' T'$).

Wählen wir in der Abwicklung den Punkt C_3 zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der x -Achse $C_3 D_3$ und bezeichnen mit x , y die Koordinaten von P_3 , mit φ den Winkel $P' M_1 C_1$,

so folgt die später zu benutzende Regel: Der Krümmungsradius im Scheitel einer Sinuskurve ist gleich der Scheitelordinate, multipliziert mit dem Quadrat der Kotangente des Winkels, den die Inflexionstangente mit der Abszissenachse bildet.

82. Der Schnitt einer Ebene E (e_1, e_2) mit einem schiefen Kreiszyylinder, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, ist eine Ellipse k_3 , nämlich die perspektiv affine Kurve zu k_1 für e_1 als Affinitätsachse. Die Mantellinien durch die Endpunkte zweier aufeinander senkrechten Durchmesser von k_1 schneiden E in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser von k_3 . Zur Ausführung der Konstruktion eignet sich dasselbe Verfahren wie beim ebenen Schnitt eines Prismas (52).

83. Abwicklung eines schiefen Kreiszyinders. Der Grundkreis k_1 befinde sich in Π_1 , sein Mittelpunkt auf x ; die Mantellinien seien $\parallel \Pi_2$; insbesondere mögen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die in Π_2 liegenden Mantellinien bedeuten. Wir teilen den vorderen Halbkreis k_1 von A_1 aus in eine beliebige Anzahl, etwa 12, gleicher Teile, bezeichnen die Teilpunkte der Reihe nach mit 1, 2, 3 . . . 12 = B_1 und ersetzen den Zylinder durch das Prisma, das die durch $A_1, 1, 2 \dots$ gehenden Mantellinien zu Seitenkanten hat. Wickeln wir das Prisma unter Festhaltung von $A_1 A_2$ in Π_2 ab, so gelangen die Punkte 1, 2 . . . in die Lagen $1_0, 2_0 \dots$, die wir erhalten, indem wir $1'' 1_0, 2'' 2_0 \dots \perp A_1 A_2$ ziehen und die Strecken $A_1 1_0, 1_0 2_0 \dots$ gleich der Sehne $A_1 1$ des Kreises k_1 machen. Dann wird durch die Kurve $A_1 1_0 2_0 \dots$ die Verwandelte des Kreises k_1 angenähert dargestellt.

Die Kurve hat in 6_0 einen Wendepunkt, weil die Berührungsebene des Zylinders im Punkte 6 auf Π_1 senkrecht steht (80). Die Inflexionstangente bildet mit der zugehörigen Mantellinie den Winkel $\alpha = \angle A_2 A_1 B_1$. — Die Krümmungsradien der Verwandelten in den Scheitelpunkten A_1 und 12_0 sind $= \frac{r}{\cos \alpha}$, wenn r den Radius von k_1 bezeichnet; der zu A_1 gehörige Krümmungsmittelpunkt ist also der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit der Mittelsenkrechten von $A_1 B_1$.

Sind die Mantellinien nicht parallel zu Π_2 , so bilde man von dem Zylinder zunächst die Projektion auf eine Π_3 , die zu den ersten projizierenden Ebenen der Mantellinien parallel ist.

Die vorliegende Aufgabe kann übrigens auch mit Hilfe eines Normalschnittes in derselben Weise gelöst werden, wie die entsprechende Aufgabe über das Prisma (51).

Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene.

84. Zwei ebene Schnitte einer Kegelfläche sind perspektiv kollineare Figuren für die Spitze des Kegels als Kollineationszentrum und die Schnittlinie beider Ebenen als Kollineationsachse (52). Das Entsprechende gilt von den Projektionen der Schnittkurven auf irgend eine Ebene.

Die ebenen Schnitte des Kreiskegels sind Kurven zweiter Ordnung, weil jede in der schneidenden Ebene liegende Gerade mit der

Kegelfläche höchstens zwei Punkte gemein hat (77). Die Schnittkurve ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die schneidende Ebene zu keiner, einer oder zwei Mantellinien parallel ist. Um zu entscheiden, welcher dieser drei Fälle vorliegt, lege man durch die Spitze des Kegels eine Ebene parallel zur schneidenden Ebene.

85. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einem geraden Kreiskegel zu konstruieren, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Die Ebene, welche durch die Kegelachse $SM \perp e_1$ gelegt wird, teilt die Schnittkurve k_1 in zwei symmetrische Hälften und enthält demnach eine Achse von k_1 . Sie schneidet E in einer Falllinie f , den Kegel in zwei Mantellinien SA und SB , und diese bestimmen auf f die Achsenendpunkte A_1 und B_1 . — Nehmen wir der Einfachheit wegen $E \perp \Pi_2$, so ist jene Symmetrieebene $\parallel \Pi_2$, und die zugehörigen Mantellinien SA, SB bilden den zweiten Umriß des Kegels.

a) Elliptischer Schnitt. Die Aufrißprojektion der Schnittellipse k_1 fällt zusammen mit der auf e_2 liegenden Strecke $A'_1 B'_1$. Die zweite Ellipsenachse $C'_1 D'_1$ geht durch den Mittelpunkt O_1 von $A_1 B_1$ senkrecht zu Π_2 ; ihre Grundrißprojektion ergibt sich mit Hilfe des Kreises i , welchen die durch O_1 gelegte Horizontalebene aus dem Kegel schneidet. — Die Parallelprojektion einer Ellipse ist im allgemeinen wieder eine Ellipse, welche die Projektionen der Achsen der ersten zu einem Paar konjugierter Durchmesser hat. Im vorliegenden Falle sind aber $A'_1 B'_1$ und $C'_1 D'_1$ selbst die Achsen von k'_1 .

Bezeichnen wir mit r_1 und r_2 bezw. die Abstände der Punkte A'_1 und B'_1 von $S''M''$, so ist als Mittellinie in einem Parallelogramm die Aufrißprojektion des Kreises $i = r_1 + r_2$, demnach als Radius von i' die Strecke $S'C'_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}$, d. h. $= \frac{A'_1 B'_1}{2}$; S' ist also ein Brennpunkt von k'_1 .

Der auf einer beliebigen Mantellinie SP befindliche Punkt P_1 von k_1 ergibt sich zunächst im Aufriß als $P'_1 = S''P'' \times e_2$, dann im Grundriß am genauesten mit Hilfe des durch P'_1 bestimmten Horizontalschnittes der Kegelfläche. — Die Tangenten in P an k und in P'_1 an k'_1 schneiden sich in T auf der Kollineationsachse e_1 .

Als wahre Größe von k_1 erhalten wir durch Umlegung in Π_1 eine Ellipse k_1^0 mit den Achsen $A_1^0 B_1^0 = A'_1 B'_1$ und $C_1^0 D_1^0 = C'_1 D'_1$.

Die Abwicklung des Kegelmantels ist ein Kreissektor, der $S''A''$ zum Radius und die Peripherie von k zum Bogen hat. Dieser Bogen wird angenähert bestimmt durch Übertragen kleiner Bogenstücke von k . Um auf der Geraden SP den Punkt P_1 der Verwandelten von k_1 zu verzeichnen, ziehen wir $P'_1 Q'' \parallel x$ bis $S''A''$; dann ist $SP_1 = S''Q''$. Die Tangente an die Verwandelte in P_1 ergibt sich durch Anheften des rechtwinkligen Dreiecks $P_1 P T$, dessen Kathete PT im Grundriß in wahrer Größe erscheint.

Die Wendepunkte der Verwandelten entsprechen denjenigen Punkten V_1 und W_1 von k_1 , deren Berührungsebenen auf E senkrecht stehen (80). Diese Ebenen gehen durch das Lot von S auf E . Ziehen wir aus seinem ersten Spurpunkte Z an k die Tangente ZV , so finden

wir auf der Mantellinie SV in bekannter Weise den Punkt V_1 und damit die Tangente von k_1 , die in der Abwicklung zur Inflectionstangente wird. — Bezeichnen wir mit q_1 und q_2 die Krümmungsradien der Verwandten in den Scheiteln A_1 und B_1 , mit q den Krümmungsradius der Ellipse k_1^0 in A_1^0 , so ist nach 80:

$$q_1 = \frac{q}{\cos \angle B_1' A_1' A''}, \quad q_2 = \frac{q}{\cos \angle S'' B_1' A_1'};$$

q_1 ergibt sich also als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches q zur Kathete und $\angle B_1' A_1' A''$ zum anliegenden Winkel hat.

86. b) Hyperbolischer Schnitt, $E \perp \Pi_2$. Aus dem Aufriß finden wir wieder unmittelbar die Scheitel A_1 und B_1 , sowie den Mittelpunkt O_1 der Hyperbel k_1 . Die Grundrißprojektion von k_1 ist eine Hyperbel mit den Scheiteln A_1', B_1' und dem Brennpunkt S' (85). — Eine Ebene, die durch $S \parallel E$ gelegt wird, hat mit dem Kegel zwei Mantellinien SF und SG gemein, welche die unendlich fernen Punkte von k_1 enthalten ($S''F'' \parallel e_2$). Parallel zu SF und SG gehen durch O_1 die Asymptoten von k_1 .

Um auf irgend einer Mantellinie SP den Punkt P_1 von k_1 und zugleich die zugehörige Tangente zu ermitteln, verfahren wir, besonders wenn P_1' als Schnittpunkt von e_2 und $S''P''$ nur ungenau bestimmt ist, nach 52 in folgender Weise: Eine horizontale Hilfsebene Σ schneidet E in einer ersten Hauptlinie m , den Kegel in einem Kreise k_2 , die Gerade SP in P_2 . Die Berührungsebene T des Kegels in der Mantellinie PP_2 hat zu Spurlinien in Π_1 und Σ bzw. die Tangenten PT und P_2T_2 an k und k_2 . Sind nun T und T_2 bzw. die Schnittpunkte von e_1 und PT , sowie von m und P_2T_2 , so ist TT_2 die Schnittlinie der Ebenen E und T , also die Tangente von k_1 im Punkte P_1 , der hierdurch gleichfalls bestimmt wird.

Dasselbe Verfahren empfiehlt sich auch zur Konstruktion der Asymptoten, insbesondere, wenn sich $S''B''$ und e_2 unter sehr spitzem Winkel schneiden, so daß der Punkt O_1 als Mittelpunkt der Strecke A_1B_1 nicht scharf bestimmt ist. Die Asymptoten ergeben sich dann als Schnittpunkte von E mit den Berührungsebenen des Kegels in SF und SG . Für die Abwicklung erhalten wir auf diese Weise zugleich die Asymptoten der Verwandten von k_1 .

87. Die Brennpunkte der ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels. Wir erzeugen den Kegel durch Drehung des gleichschenkligen Dreiecks ASB um seine Höhenlinie SM und schneiden ihn senkrecht zur Ebene ASB mit der Ebene E in einer Ellipse k_1 ; dann liegen auf SA und SB die Scheitel A_1 und B_1 von k_1 . Konstruieren wir die Kreise v und v_* , welche die Geraden A_1B_1 , SA , SB der Reihe nach in F , H , J und F_* , H_* , J_* berühren, und deren Mittelpunkte K und K_* sich auf SM befinden, so erhalten wir aus ihnen durch Drehung um SM zwei Kugeln K und K_* ; diese berühren E in F und F_* und den Kegel in zwei Kreisen u und u_* mit den Durchmessern HJ und H_*J_* . Eine beliebige Mantellinie schneide k_1 , u , u_* bzw. in den Punkten P_1 , Q , Q_* . Dann sind FP_1 und QP_1 zwei Tangenten der Kugel K aus dem Punkte P_1 , also ist:

$$FP_1 = QP_1$$

und ebenso

$$F_*P_1 = Q_*P_1,$$

folglich:

$$FP_1 + F_*P_1 = QQ_* = HH_*,$$

d. h. konstant für alle Punkte von k_1 . Wir schließen daraus, daß F und F_* die Brennpunkte von k_1 sind, und erhalten demnach den Satz: Schneidet man einen geraden Kreiskegel durch eine Ebene und konstruiert die beiden Kugeln, die den Kegel in einem Kreise und die Ebene in einem Punkte berühren, so sind die beiden Berührungspunkte die Brennpunkte des entstehenden Kegelschnittes.

Sei G der Gegenpunkt von F im Kreise v ; dann geht die Gerade GF_* durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt S von v und v_* . Eine Ebene Δ , die parallel zu E durch den Kegel gelegt wird, schneidet diesen in einem Kegelschnitt k_2 , der zu k_1 ähnlich ist, und dessen Brennpunkte auf den Geraden SF und SG liegen. Nun ist k_2 der scheinbare Umriß der Kugel K für S als Projektionszentrum und Δ als Bildebene; d. h.: Der scheinbare Umriß einer in Zentralprojektion dargestellten Kugel ist ein Kegelschnitt, der die Projektionen der Endpunkte des auf der Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers zu Brennpunkten hat.

88. Hieraus ergibt sich beiläufig die Darstellung der Kugel in schiefer Parallelprojektion. Die projizierenden Strahlen, welche die Kugel berühren, bilden einen geraden Kreiszylinder, und dieser schneidet die Bildebene Π_2 in der Umrißellipse u_s , der schiefen Projektion des Hauptkreises u , dessen Ebene auf der Projektionsrichtung senkrecht steht. Denken wir uns von der Kugel den Mittelpunkt K etwa durch seine senkrechte und seine schiefe Projektion K'' und K_s , sowie den Radius r gegeben, so ist K_s der Mittelpunkt von u_s . Machen wir auf K_sK'' die Strecken $K_sF_s = K_sG_s = \frac{r}{2}$, so sind F_s und G_s die schiefen Projektionen der Endpunkte des auf Π_2 senkrechten Kugeldurchmessers, also die Brennpunkte von u_s . Jeder Durchmesser von u erscheint in der schiefen Projektion vergrößert, nur nicht der zu Π_2 parallele Durchmesser AB , der unverändert bleibt. Ziehen wir also $K_sA_s \perp K_sF_s$ und $= r$, so ist K_sA_s die kleine Halbachse von u_s ; die große Halbachse ist folglich $= F_sA_s$.

89. Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einem schiefen Kreiskegel, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Die Schnittkurve k_1 wird konstruiert, indem man für eine hinreichende Anzahl von Mantellinien ihre Schnittpunkte mit E ermittelt, etwa unter Benutzung einer $\Pi_3 \perp e_1$. — Die Ebene, die durch die Spitze S und den Mittelpunkt M von $k \perp \Pi_1$ gelegt wird, teilt den Kegel in zwei symmetrische Hälften und schneidet ihn in seiner längsten und seiner kürzesten Mantellinie SA bzw. SB . Soll daher der Kegel auch noch abgewickelt werden, so empfiehlt es sich, von vornherein den Kreis k von A aus in eine gerade Anzahl gleicher Teile zu teilen und für die nach

den Teilpunkten gehenden Mantellinien die Schnittpunkte mit E zu bestimmen. Bei der Abwicklung ersetzt man den Kegel annäherungsweise durch die Pyramide, die jene Mantellinien zu Kanten hat.

Durchdringung zweier Kegel- oder Zylinderflächen.

90. Zwei krumme Flächen A und B erzeugen als ihre Durchdringung im allgemeinen eine Raumkurve c , die man konstruiert, indem man durch A und B eine Schar geeigneter Hilfsflächen legt und für jede derselben ihre Schnittkurven mit A und B ermittelt; die Schnittpunkte beider Kurven sind Punkte von c . Dabei sind unter „geeigneten“ Hilfsflächen solche zu verstehen, welche sowohl A wie B in möglichst einfachen, leicht konstruierbaren Kurven schneiden. In den meisten Fällen wird man Ebenen als Hilfsflächen verwenden, und dann ist jedesmal zu überlegen, für welche Ebenen die Konstruktion sich am einfachsten gestaltet.

Eine krumme Fläche heißt von der m^{ten} Ordnung, wenn sie von jeder nicht in ihr liegenden Geraden in höchstens m Punkten getroffen wird. Man versteht ferner unter Ordnung einer Raumkurve die Anzahl der Punkte, die sie mit einer Ebene höchstens gemein hat. Sind nun die sich durchdringenden Flächen A und B bezw. von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, so werden sie von einer beliebigen Ebene in zwei Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung geschnitten, und diese treffen sich in höchstens mn Punkten der Durchdringungskurve c . Daraus folgt: Zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung durchdringen sich im allgemeinen in einer Raumkurve mn^{ter} Ordnung. — Die Projektion dieser Kurve ist im allgemeinen auch von der mn^{ten} Ordnung. Denn eine beliebige Gerade der Bildebene hat mit der Bildkurve c' ebensoviele Punkte gemein, wie die durch sie gelegte projizierende Ebene mit der Kurve c , d. h. höchstens mn .

Die Tangente der Durchdringungskurve in irgend einem Punkte derselben ist die Schnittlinie der Berührungsebenen beider Flächen in diesem Punkte.

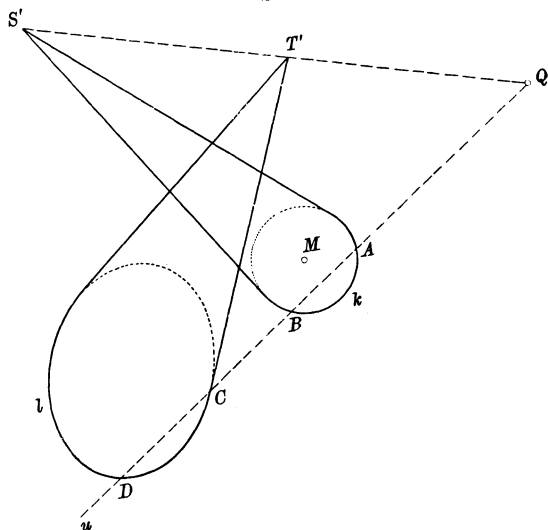
91. Um die Durchdringung zweier Kegelflächen zu konstruieren, benutzt man Hilfsebenen durch die Verbindungslinie beider Spitzen; solche Ebenen schneiden nämlich jede von beiden Flächen in Mantellinien (vergl. 55). Tritt an die Stelle des einen Kegels ein Zylinder, so legt man die Hilfsebenen durch die Gerade, die durch die Spitze des Kegels parallel zu den Mantellinien des Zylinders gezogen wird. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Zylinder, so verwendet man Hilfsebenen parallel zu den Mantellinien beider Flächen.

92. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Kegelflächen zu konstruieren, deren Leitkurven in Π_1 liegen. Wir bezeichnen die beiden Kegelflächen mit K und Λ , ihre Spitzen bezw. mit S und T , ihre Leitkurven mit k und l . In Fig. 10, die nur die Grundrißprojektion wiedergibt, ist k ein Kreis, l eine Ellipse. Um die Durchdringungskurve c zu konstruieren, ermitteln wir zunächst den ersten Spurpunkt Q der Geraden ST . Eine Hilfsebene, die durch ST

beliebig gelegt wird, hat zur ersten Spurlinie eine durch Q gehende Gerade u . Sind A, B bzw. C, D die Schnittpunkte von u mit k und l , so schneidet die Hilfsebene die Kegelflächen in den Mantellinien SA, SB und TC, TD , und diese bestimmen vier Punkte von c : $1 = SA \times TC$, $2 = SB \times TC$, $3 = SB \times TD$, $4 = SA \times TD$.

Fig. 10.

Drehen wir die Gerade u in Π_1 um Q , so erreicht sie eine Grenzlage v , in der sie l (in G) berührt und k (in E und F) schneidet. Dann zählt $T'G$ für zwei unendlich benachbarte Mantellinien des Kegels Λ in der durch v gelegten Hilfsebene, folglich hat jede der Geraden SE, SF zwei unendlich benachbarte Punkte mit c gemein, ist also eine Tangente der Durchdringungskurve. Das Analoge gilt von der aus Q



an k gehenden Tangente w , die l in H und J schneidet. Auf k begrenzen die Punkte E und F , auf l die Punkte H und J einen Bogen, dessen Mantellinien den anderen Kegel nicht schneiden; es handelt sich also im vorliegenden Falle um eine bloße Eindringung. — Eine vollständige Durchdringung findet statt, wenn die eine Leitkurve ganz innerhalb der beiden Tangenten liegt, die von Q an die andere Leitkurve gehen.

Die scheinbare Umrißlinie $T'C$ von Λ ist die Grundrißprojektion zweier unendlich benachbarten Mantellinien und enthält deshalb zweimal zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve c' ; sie ist also eine Doppeltangente der Projektion der Durchdringungskurve.

Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion bestimmen wir zuerst die ausgezeichneten Punkte auf den Mantellinien, welche c berühren, sowie die Punkte auf den Umrißlinien und legen dann nach Bedürfnis weitere Hilfsebenen in die vorhandenen Lücken. Die Reihenfolge, in der die erhaltenen Punkte zu verbinden sind, ergibt sich wie in 55 durch gleichzeitiges Umfahren der beiden Leitkurven.

Ein Punkt von c' ist sichtbar, wenn die beiden durch ihn gehenden Mantellinien im Grundriß sichtbar sind.

Die Tangente der Durchdringungskurve im Punkte 4 hat zum ersten Spurpunkte den Schnittpunkt der Tangenten in A und D bzw. an k und l (90).

93. Singuläre Punkte im Bilde der Durchdringungskurve. In Fig. 10 hat die Kurve c' zwei Doppelpunkte. Ein solcher Doppelpunkt entsteht im Bilde einer Raumkurve immer dann, wenn ein projizierender Strahl die Originalkurve zweimal schneidet. — Rücken die beiden Schnittpunkte einander unendlich nahe, berührt also der projizierende Strahl die Originalkurve in einem Punkte P , so zieht sich in der Bildkurve die zum Doppelpunkte gehörige Schleife in den Punkt P' zusammen; d. h. die Bildkurve erhält in P' einen Rückkehrpunkt.

Einem Punkte der Originalkurve, dessen Schmiegungsebene eine projizierende Ebene ist, entspricht in der Bildkurve im allgemeinen ein Wendepunkt. Dann entsprechen nämlich den drei unendlich benachbarten Punkten, welche die Schmiegungsebene mit der Originalkurve gemein hat, auf der Bildkurve drei unendlich benachbarte Punkte in einer Geraden.

94. Unendlich ferne Punkte der Durchdringungskurve entstehen aus den Paaren paralleler Mantellinien beider Kegelflächen. Um diese Paare zu bestimmen, denken wir uns den einen Kegel — in Fig. 10 denjenigen mit kreisförmiger Leitkurve — parallel zu sich verschoben, bis seine Spitze S mit derjenigen T des anderen zusammenfällt. Die Leitkurve k_1 des verschobenen Kegels und die Kurve k sind ähnliche Figuren in paralleler Lage mit Q als Ähnlichkeitspunkt, sowie T' und S' als einem Paar entsprechender Punkte.

Bezeichnen wir mit P_1 einen Schnittpunkt von k_1 und l , mit P den entsprechenden Punkt von k (auf QP_1), so sind die Mantellinien SP und TP_1 einander parallel, und die zugehörigen Berührungsebenen schneiden sich in einer Asymptote der Durchdringungskurve. Diese ist $\parallel TP_1$ und geht durch den Schnittpunkt der Tangenten an k und l bzw. in P und P_1 . — In Fig. 10 haben k_1 und l keinen Punkt miteinander gemein; die Kurve c hat also keinen unendlich fernen Punkt.

95. Aufgabe. Die Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiszylinder zu konstruieren. Der Grundkreis k des Kegels liege in Π_1 ; die Achse a des Zylinders sei $\parallel \Pi_2$, sein Grundkreis l befinde sich also in einer zu Π_2 senkrechten Ebene Φ (f_1, f_2). Wir ziehen zunächst durch die Spitze S des Kegels eine Parallele zu a , bestimmen ihre Schnittpunkte Q und R bzw. mit Π_1 und Φ und legen hierauf die Ebene Φ in Π_1 um; dabei gelangen l und R nach l_0 und R_0 . Sei nun QE die erste Spurlinie einer durch SQ gehenden Hilfsebene H und E ihr Schnittpunkt mit f_1 , so ist ER_0 die umgelegte Schnittlinie von Φ und H . Die Geraden QE und ER_0 treffen k und l_0 bzw. in A, B und C_0, D_0 . Dann schneidet H den Kegel in den Geraden SA und SB , den Zylinder in zwei Mantellinien, deren Grundrißprojektionen durch C_0 und D_0 gehen, und deren Aufrißprojektionen mittels C'' und D'' bestimmt werden, u. s. w.

96. Durchdringung zweier geraden Kreiszylinder mit sich schneidenden Achsen. Die Achsen a und b mögen sich in Π_1 befinden; dann schneidet Π_1 die Grundkreise k und l bzw. in den Durchmessern $EF \perp a$ und $GH \perp b$. Die in Π_1 liegenden Mantel-

linien bestimmen sofort vier Punkte 1, 2, 3, 4 der Durchdringungskurve c . Um weitere Punkte zu konstruieren, schneiden wir beide Zylinder mit einer Schar von Hilfsebenen, die zu a und b , also zu Π_1 parallel sind. Verstehen wir unter H irgend eine dieser Ebenen, unter m und n ihre Schnittlinien mit den Ebenen von k und l , unter k_0 und l_0 die Umlegungen von k und l in Π_1 , so ist in der Umlegung $m_0 \parallel EF$, $n_0 \parallel GH$ und $\text{Abst.}(m_0, EF) = \text{Abst.}(n_0, GH) = \text{Abst.}(H, \Pi_1)$. Die Geraden m_0 und n_0 treffen k_0 und l_0 bzw. in A_0, B_0 und C_0, D_0 , und die zugehörigen Mantellinien schneiden sich in vier Punkten von c .

Die Durchdringungskurve zweier Kegel- oder Zylinderflächen zweiter Ordnung ist eine Raumkurve vierter Ordnung; ihre Projektionen sind also im allgemeinen ebene Kurven von derselben Ordnung (90). Gegenwärtig ist nun die Kurve c symmetrisch in Bezug auf Π_1 ; jeder Punkt von c' ist also die Grundrißprojektion zweier Punkte von c . Ziehen wir in Π_1 irgend eine Gerade g und legen durch sie eine Ebene $\perp \Pi_1$, so schneidet diese c höchstens in vier Punkten, die paarweise dieselbe Grundrißprojektion besitzen. Die Gerade g hat demnach mit c' höchstens zwei Punkte gemein, d. h. die Grundrißprojektion der Durchdringungskurve ist im vorliegenden Falle nur von der zweiten Ordnung; sie besteht aus zwei Bogenstücken 12 und 34 einer Hyperbel, die den Punkt $a \times b$ zum Mittelpunkt hat.

Haben die betrachteten Zylinderflächen gleichen Radius, so berühren sie sich in zwei Punkten V und W , deren Verbindungslinie im Punkte $a \times b$ von Π_1 senkrecht halbiert wird. Dann sind die Ellipsen, welche die Strecke VW und je eine Diagonale des Rhombus 1 2 3 4 zu Achsen haben, den beiden Zylindern gemeinsam; die Durchdringungskurve zerfällt also in zwei ebene Kurven, nämlich in die genannten Ellipsen (vergl. z. B. Kreuzgewölbe).

97. Weitere Sonderfälle. Berühren sich die beiden Kegelflächen in einem Punkte P , so ist derselbe ein Doppelpunkt ihrer Durchdringungskurve. Denn jede durch P gehende Ebene schneidet die beiden Kegelflächen in zwei Kurven, die sich in P berühren; in jeder solchen Ebene zählt also P für zwei Schnittpunkte mit der Durchdringungskurve. — Der letzte Satz gilt offenbar ganz allgemein für irgend zwei krumme Flächen, die sich in einem Punkte berühren.

Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung eine Mantellinie gemein haben, so durchdringen sie sich überdies in einer Raumkurve dritter Ordnung. Berühren sie sich in der gemeinsamen Mantellinie, so ist der Rest der Durchdringungskurve ein Kegelschnitt. — Enthalten die beiden Kegelflächen denselben Kegelschnitt, so haben sie im allgemeinen noch einen zweiten Kegelschnitt gemein. Hiernach ist z. B. der Schlagschatten, den der kreisförmige Rand eines zylindrischen Rohres ins Innere des Rohres wirft, eine Ellipse.

Schlagschatten auf Kegel- und Zylinderflächen, sowie auf krummen Flächen überhaupt.

98. Die Grenzlinie des Schlagschattens, den eine krumme Fläche A von einer anderen Fläche B empfängt, ist ein Teil der Durch-

dringungskurve von A mit dem Lichtstrahlenzylinder, der die Eigenschattengrenze bezw. den Rand von B zur Leitkurve hat. Wir ermitteln ihn zumeist nach dem indirekten Verfahren (62, II), indem wir von B und von einer auf A passend gewählten Kurvenschar den Schlagschatten auf Π_1 konstruieren. Bezeichnet i eine Kurve der Schar, i_h ihren Schatten auf Π_1 , P_h einen Schnittpunkt von i_h mit der Schlagschattengrenze von B , so bestimmt der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl auf i einen Punkt P , welcher der Grenzlinie des auf A geworfenen Schlagschattens angehört, falls er sich auf dem beleuchteten Teile von A befindet. — Ist A eine Kegel- oder Zylinderfläche, so ersetzen wir jene Kurvenschar naturgemäß durch eine Reihe von Mantellinien des beleuchteten Flächenteiles. Bei einer Kugel benutzen wir als Hilfskurven eine Schar horizontaler Kreise u. s. w.

Um dieselbe Aufgabe nach der Methode der projizierenden Ebenen (62, I) zu lösen, legen wir durch A und B eine Reihe von Hilfsebenen parallel zu einer projizierenden Ebene des Lichtstrahles l . Eine solche Ebene schneidet A und B bezw. in zwei Kurven a und b . Dann treffen die Tangenten, die $\parallel l$ an b gezogen werden, die Kurve a in Punkten der gesuchten Schlagschattengrenze. — Dieses Verfahren liefert zugleich — allerdings im allgemeinen wenig genau — in den Berührungspunkten der zu l parallelen Tangenten eine Reihe von Punkten der Eigenschattengrenzen beider Flächen.

99. Trifft die Grenzlinie des auf die Fläche A fallenden Schlagschattens die Eigenschattengrenze der Fläche in einem Punkte Q , so ist die Tangente der Schlagschattengrenze in Q den Lichtstrahlen parallel. Im allgemeinen wird nämlich ein Lichtstrahl, der in einem Punkte der Schlagschattengrenze in A eindringt, die Fläche mindestens noch einmal schneiden. Aber der durch Q gehende Lichtstrahl berührt die Fläche an der betrachteten Stelle, hat also mit der Fläche und folglich mit der Durchdringungskurve, von der die Schlagschattengrenze einen Teil bildet, zwei zusammenfallende Punkte gemein.

100. Durchdringen sich die Flächen A und B in der Kurve c , und trifft diese die Eigenschattengrenze s von B im Punkte P , so berührt die Grenzlinie s_* des von B auf A geworfenen Schlagschattens die Kurve c in P . Denn s_* gehört zur Durchdringungskurve von A mit dem Lichtstrahlenzylinder, der B in s berührt, folglich ergibt sich die Tangente von s_* in P als Schnittlinie der zugehörigen Berührungsebenen an A und den Zylinder. Die letzte Ebene ist aber identisch mit der Berührungsebene von B in P , und diese schneidet die Berührungsebene von A in der Tangente von c .

VII. Umdrehungsflächen.

Eigenschaften der Umdrehungsflächen. Berührungsebenen und ebene Schnitte.

101. Eine Umdrehungsfläche (Rotationsfläche) entsteht, wenn eine unveränderliche Kurve sich um eine feste Gerade

dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt. Die Kurve heißt die Erzeugende, die feste Gerade die Achse der Umdrehungsfläche. Jeder Punkt der Erzeugenden beschreibt bei der Drehung einen Parallelkreis der Fläche, dessen Ebene auf der Achse senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

Jede auf der Fläche liegende Kurve, die jeden Parallelkreis schneidet, kann als Erzeugende der Fläche betrachtet werden.

Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Meridiankurve. Alle Meridiankurven sind kongruent und symmetrisch in Bezug auf die Achse, wie sich sofort ergibt, wenn man eine Meridiankurve als Erzeugende auffaßt.

102. Sei a die Achse, m die Meridiankurve einer Umdrehungsfläche, P ein beliebiger Punkt von m , PS die zugehörige Tangente. Durch P geht ein Parallelkreis p ; sein Mittelpunkt Q ist der Fußpunkt des Lotes von P auf a . Die Tangenten in P an m und p bestimmen die Berührungsebene T der Fläche in P . Da die Parallelkreistangente auf der Meridianebene senkrecht steht, so gilt dasselbe von der Ebene T , d. h.: Die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche ist senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes. Deshalb fällt die Flächennormale in P zusammen mit der Meridiannormalen PO .

Beschreiben wir um den Schnittpunkt O von PO und a einen Kreis mit dem Radius OP und drehen die ganze so erhaltene Figur um a , so folgt der Satz: Jede Umdrehungsfläche wird längs eines Parallelkreises von einem Umdrehungskegel und von einer Kugel berührt, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen. — Sie wird längs jeder Meridiankurve von einem Zylinder berührt, dessen Mantellinien auf der Meridianebene senkrecht stehen.

103. Darstellung einer Umdrehungsfläche, deren Achse a auf Π_1 senkrecht steht. In der zu Π_1 parallelen Meridianebene M_0 sei die Meridiankurve m_0 gegeben; sie bildet den zweiten wahren Umriß der Fläche und soll deshalb als Umriß- oder Hauptmeridian bezeichnet werden. Zum zweiten Umriß gehören außerdem die Parallelkreise derjenigen Punkte von m_0 , deren Tangenten auf a senkrecht stehen. Der erste Umriß besteht aus den Parallelkreisen solcher Punkte von m_0 , deren Tangenten zu a parallel sind.

Ist der Punkt P der Umdrehungsfläche durch seine erste Projektion P' gegeben, so finden wir seine zweite Projektion mit Hilfe des Parallelkreises p , der durch P geht, und der m_0 in P_0 schneidet.

Die Berührungsebene T der Fläche in P ist nach dem Vorigen durch Parallelkreis- und Meridiantangente von P bestimmt. Drehen wir die durch P gehende Meridiankurve um a , bis sie mit m_0 zusammenfällt, so gelangt P nach P_0 , und die zugehörige Meridiantangente kommt in eine Lage SR_0 , in der sie a in S , Π_1 in R_0 schneidet. Machen wir dann auf $a'P'$ die Strecke $a'R = \text{Abst.}(R''_0, a'')$, so ist R der erste Spurpunkt der Meridiantangente in P . Die erste Spurlinie t_1 von T geht durch R parallel zur Parallelkreistangente in P , also $\perp a'R$.

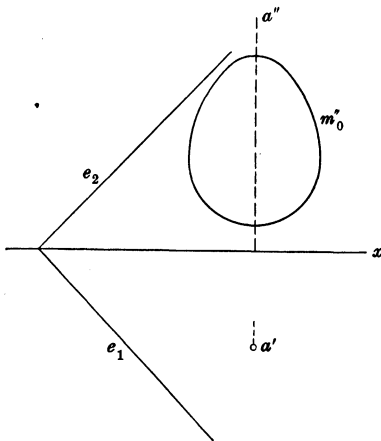
Trifft t_1 die Gerade M'_0 in T , so ist ST die in der Ebene M_0 liegende Hauptlinie von T , mithin $t_2 \parallel S''T''$.

Die Gerade ST kann auch ohne vorhergehende Bestimmung von t_1 unmittelbar konstruiert werden. Ziehen wir nämlich $P''_0 O'' \perp P''_0 S''$ bis a'' , so ist $P'' O''$ die Aufrißprojektion der Flächennormale in P , also $S'' T'' \perp P'' O''$.

Ist statt des Meridians eine beliebige Kurve c (c' , c'') als Erzeugende der Fläche gegeben, so erhalten wir m_0 , indem wir für eine Reihe von Punkten auf c die durch sie gehenden Parallelkreise zeichnen und deren Schnittpunkte mit der Ebene M_0 bestimmen.

104. Aufgabe. Den Schnitt einer Umdrehungsfläche, deren Achse a auf Π_1 senkrecht steht, mit der Ebene E (e_1, e_2) zu konstruieren (Fig. 11). Die Schnittkurve k ist symmetrisch in

Fig. 11.



Bezug auf die Schnittlinie f von E mit der auf e_1 senkrechten Meridianebene M , ihre Grundrißprojektion k' also symmetrisch in Bezug auf das Lot f' von a' auf e_1 . Bezeichnen wir mit h die zweite Hauptlinie von E in der Ebene M_0 des Umrißmeridians m_0 , mit A den Schnittpunkt von a und h , mit B den Schnittpunkt von e_1 und f' , so ist f die Verbindungslinie von A mit B . Auf f befindet sich der höchste und der tiefste Punkt der Kurve k ; sie sind die Schnittpunkte C und D von f mit der in M liegenden Meridiankurve m . Um zunächst diese ausgezeichneten Punkte von k zu bestimmen, drehen wir die Ebene M um

a , bis sie mit M_0 zusammenfällt. Dabei gelangt m nach m_0 , B nach B_0 , und die Gerade AB_0 schneidet m_0 in C_0 und D_0 . Dann ist $a' C' = \text{Abst. } (C'_0, a'')$. Die Tangenten von k in C und D sind $\parallel e_1$.

Weitere Punkte von k ergeben sich mittels horizontaler Hilfsebenen, die zwischen C und D beliebig angenommen werden. Eine solche Ebene schneidet die Fläche in einem Parallelkreise p , die Ebene E in einer ersten Hauptlinie g , und diese trifft p in zwei Punkten P und Q von k . In der angegebenen Weise finden wir u. a. die Punkte von k im ersten Umriß der Fläche; die Punkte im zweiten Umriß liegen auf h .

Die Tangente von k im Punkte P ist die Schnittlinie von E mit der Berührungsebene der Fläche in P . Dabei genügt es, von dieser Berührungsebene entweder die erste Spur, oder die in M_0 liegende Hauptlinie zu konstruieren.

105. Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer ihrer Berührungsebenen. Ist die Meridiankurve m im Punkte P konkav gegen die Achse a , so hat die Berührungsebene T dieses Punktes in

seiner nächsten Umgebung keinen Punkt mit der Umdrehungsfläche gemein. Sie schneidet die Fläche in ihrem weiteren Verlaufe im allgemeinen in einer Kurve, welcher der Punkt P als isolierter Punkt angehört. Denken wir uns die Ebene T parallel zu sich selbst um ein sehr kleines Stück in das Innere der Fläche verschoben, so hat sie mit der Fläche in der Umgebung von P ein kleines Oval gemein. Der Punkt P heißt deshalb ein elliptischer Punkt der Fläche.

Ist ferner m im Punkte Q konvex gegen a , so liegen m und der Parallelkreis des Punktes Q auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Berührungsebene; diese trifft jeden der beiderseits benachbarten Parallelkreise in zwei Punkten und schneidet demnach die Fläche in einer Kurve, die in Q einen Knotenpunkt hat. Wir nennen Q einen hyperbolischen Punkt der Fläche.

Konstruieren wir endlich die Berührungsebene in einem Wendepunkte R von m , so schneidet diese Ebene von den Parallelkreisen der Nachbarpunkte nur diejenigen, die auf der einen Seite des zu R gehörigen Parallelkreises liegen, und R ist ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve (parabolischer Punkt der Fläche).

Überhaupt gilt für jede beliebige krumme Fläche der Satz: Die Berührungsebene einer krummen Fläche schneidet die Fläche im allgemeinen in einer Kurve, die im Berührungspunkte einen Doppelpunkt hat. Je nachdem dieser ein isolierter Punkt, oder ein Knotenpunkt, oder ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve ist, nennen wir ihn einen elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Punkt der Fläche.

Das einschalige Umdrehungshyperboloid.

106. Wir untersuchen die Umdrehungsfläche Φ , die entsteht, wenn eine Gerade g um eine zu ihr windschiefe Achse a rotiert. Dabei sei $a \perp \Pi_1$ und die Erzeugende g in ihrer Anfangslage $\parallel \Pi_2$.

Je zwei Lagen von g sind windschief zu einander; denn sie begrenzen auf allen Parallelkreisen Bogenstücke von gleichem Centriwinkel. Die Fläche Φ ist also windschief.

Der Punkt K von g , welcher der Achse a am nächsten liegt, beschreibt den Kehlkreis k der Fläche. Zwei Punkte von g , die von K gleich weit entfernt sind, durchlaufen gleiche Parallelkreise; die Fläche Φ ist also symmetrisch in Bezug auf die Kehlkreisebene.

Die Grundrißprojektionen der Erzeugenden berühren den Kreis k' , ihre Aufrißprojektionen den Aufriß des Umrißmeridians m_0 .

Sei P ein beliebiger Punkt von g , p der durch ihn gehende Parallelkreis, P_0 ein Schnittpunkt von p mit der Ebene von m_0 , O der Mittelpunkt und d der Radius von k , γ_1 der Winkel von g mit Π_1 . Bezeichnen wir ferner mit ξ den Radius von p , mit η die Entfernung der Ebenen von k und p , so sind ξ und η die rechtwinkligen Koordinaten von P_0 für O als Anfangspunkt und a als η -Achse. Dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $a'K'P'$:

$$a' P'^2 - K' P'^2 = d^2$$

oder

$$\zeta^2 - \eta^2 \cot^2 \gamma_1 = d^2.$$

Die Meridiankurve m_0 ist also eine Hyperbel, die a zur Nebenachse, O zum Mittelpunkt und eine Parallele durch O zu g zur Asymptote hat; ihre Hauptachse hat die Länge $2d$. Die Fläche Φ ist demnach ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. — Die Asymptoten von m_0 erzeugen den Asymptotenkegel der Fläche.

107. Ziehen wir durch K die Gerade h symmetrisch zu g in Bezug auf die Kehlkreisebene, so sind je zwei Punkte von g und h , die in derselben Horizontalebene liegen, von a gleich weit entfernt; jeder Punkt von h befindet sich also auf dem Parallelkreise, den der entsprechende Punkt von g beschreibt. Die Gerade h liegt demnach ganz auf dem Hyperboloid, das wir folglich auch durch Drehung von h erzeugen können. Auf dem Hyperboloid befindet sich also eine zweite Schar gerader Linien. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Geraden, nämlich je eine von jeder Schar. Jede Gerade der einen Schar schneidet alle Geraden der anderen Schar, aber keine Gerade derselben Schar.

Durch eine halbe Umdrehung um a gelangt h in eine Lage $h_1 \parallel g$. Daraus folgt: Zu jeder Geraden der einen Schar gibt es eine parallele Gerade in der anderen Schar.

108. Eine Ebene T , die durch die Gerade g beliebig gelegt wird, hat mit dem Hyperboloid noch eine Gerade der zweiten Schar gemein, und diese trifft g in einem Punkte P . Jede Gerade der Ebene T schneidet das Hyperboloid in den beiden Punkten, die sie mit den beiden Erzeugenden gemein hat. Geht sie durch P , so fallen die beiden Schnittpunkte zusammen; dann berührt also die Gerade das Hyperboloid in P . Daher der Satz: Jede durch eine Erzeugende gehende Ebene ist eine Berührungsebene des Hyperboloids. Sie schneidet die Fläche noch in einer Geraden der anderen Schar und berührt sie im Schnittpunkte der beiden Geraden. — Das Hyperboloid hat hiernach lauter hyperbolische Punkte (105).

Zwei parallele Erzeugende, wie g und h_1 , bestimmen eine asymptotische Berührungsebene der Fläche. Diese berührt gleichzeitig den Asymptotenkegel in der zu den beiden Erzeugenden parallelen Mantellinie.

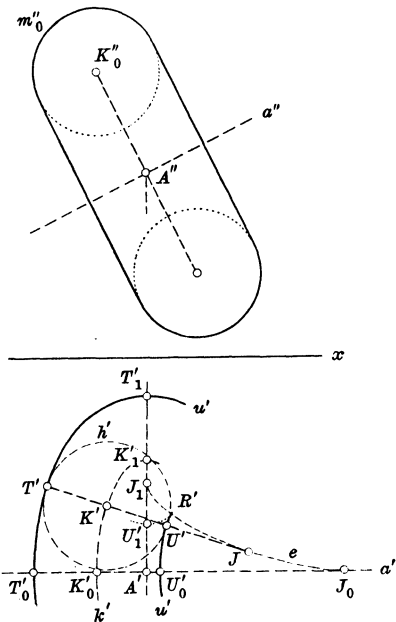
Jede nicht berührende Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem sie zu keiner, einer oder zwei Mantellinien des Asymptotenkegels parallel ist.

Umrißlinien und Schattengrenzen.

109. Aufgabe. Den ersten scheinbaren Umriß einer Umdrehungsfläche zu konstruieren, deren Achse a zu Π_2 parallel, aber gegen Π_1 beliebig geneigt ist. Die Fläche sei durch den Umrißmeridian m_0 in der ersten projizierenden Ebene von a

gegeben. Als ersten wahren Umriß erhalten wir im allgemeinen eine Raumkurve u . Um diejenigen Punkte von u zu ermitteln, die sich auf einem beliebig gewählten Parallelkreise p befinden, benutzen wir den Kegel und die Kugel, welche die Umdrehungsfläche längs p berühren. In jedem Schnittpunkte von p und u haben die drei Flächen eine gemeinsame Berührungsebene, die auf Π_1 senkrecht steht; ihre ersten scheinbaren Umrißlinien berühren sich demnach in der Grundrißprojektion des Schnittpunktes (78). Ziehen wir im Endpunkte P_0'' der Strecke p'' an m_0'' die Tangente $P_0''S''$ und die Normale $P_0''O''$, so erhalten wir auf a die Spitze S des Berührungskegels und den Mittelpunkt O der zugehörigen Kugel. Der erste scheinbare Umriß der Kugel ist der Kreis h' um O' mit dem Radius $O''P_0''$; die entsprechenden Umrißlinien des Kegels sind also die Tangenten aus S' an h' . Sie berühren h' und zugleich die gesuchte Kurve u' in zwei Punkten T' und U' .

Fig. 12.



110. Ist die Meridiankurve m_0 der vorigen Aufgabe ein Kreis vom Mittelpunkte K_0 und Radius r , so erzeugt sie eine Ringfläche, und dann ergibt sich eine einfachere Konstruktion der Umrißlinie u' durch folgende Überlegung (Fig. 12). Die Ringfläche ist die Einhüllende einer um a rotierenden Kugel vom Mittelpunkte K_0 und Radius r , folglich ist u' die Einhüllende der ersten scheinbaren Umrisse aller Lagen dieser Kugel. Bei der Drehung um a beschreibt K_0 einen Kreis k , dessen Mittelpunkt A auf a liegt. Seine Grundrißprojektion ist eine Ellipse k' mit den Halbachsen $A'K_0'$ und $A'K_1' = A''K_0'$. Wir erhalten demnach u' als die Einhüllende aller Kreise vom Radius r , deren Mittelpunkte sich auf k' befinden. Irgend zwei dieser Kreise, mit den Mittelpunkten K' und L' , schneiden sich in zwei Punkten T' und U' , deren Verbindungslinie von $K'L'$ senkrecht halbiert wird. Sind nun K' und L' zwei unendlich benachbarte Punkte von k' , so wird $T'U'$ zur Normale von k' in K' ; dann ist $K'T' = K'U' = r$, und T' und U' sind zwei Punkte von u' . Wir können daher die Kurve u' auch in der Weise konstruieren, daß wir auf allen Normalen von k' beiderseits die Strecke r abtragen; d. h. u' ist die Parallelkurve der Ellipse k' im Abstände r .

Der Kreis h' , der K' zum Mittelpunkte, r zum Radius hat, berührt u' in T' und U' ; die Ellipsennormale $T'U'$ ist also zugleich Normale von u' in T' und U' . Die Kurven k' und u' haben demnach dieselbe Evolute e , folglich in entsprechenden Punkten denselben Krümmungsmittelpunkt. Besonders nützlich bei der Konstruktion von u' sind die Scheitelkrümmungsmittelpunkte J_0 und J_1 von k' .

Wir können nunmehr die beiden Teile von u' auch als die Bahnkurven auffassen, welche die Punkte T'_0 und U'_0 beschreiben, während die Gerade $J_0T'_0$ auf der Evolute e rollt. Trifft bei dieser Rollung der Punkt U'_0 auf e , so entsteht ein Rückkehrpunkt R' von u' . Wir erhalten also R' , indem wir auf e den Bogen J_0R' angenähert gleich der Strecke $J_0U'_0$ machen. Im Punkte R wird die Raumkurve u vom projizierenden Strahl RR' berührt; hier endigt der sichtbare Bogen des inneren Teiles von u . Jeder tiefer liegende Punkt des inneren Kurvenstückes ist nämlich für das unendlich ferne erste projizierende Auge unsichtbar, weil der projizierende Strahl, der in dem betreffenden Punkte die Ringfläche berührt, oberhalb der Berührungsstelle von der undurchsichtig gedachten Fläche bereits geschnitten wird.

111. Aufgabe. Für eine Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, die Eigenschaftengrenze s bei Parallelbeleuchtung zu konstruieren (vergl. Fig. 11). Die Kurve s ist symmetrisch in Bezug auf die zur Lichtrichtung parallele Meridianebene M , ihre Grundrißprojektion also symmetrisch in Bezug auf die Gerade l' , die in der Richtung der Grundrißprojektionen der Lichtstrahlen durch a' gezogen wird. Wir ermitteln zunächst die in der Ebene M befindlichen Punkte von s , indem wir an die zugehörige Meridiankurve m in der Lichtrichtung Tangenten legen. Zu dem Zwecke ziehen wir in M einen beliebigen Lichtstrahl l und drehen die Ebene M um a , bis sie mit der Ebene des Umrissmeridians m_0 zusammenfällt (vergl. 73). Bezeichnen wir mit l'_0 die Aufrißprojektion des gedrehten Lichtstrahles, mit C''_0 und D''_0 die Punkte von m''_0 , deren Tangenten $\parallel l'_0$ sind, so entsprechen ihnen auf m als höchster und tiefster Punkt von s die Punkte C und D ; dabei ist $a'C' = \text{Abst.}(C''_0, a'')$ und $C''_0C'' \parallel x$.

Um für einen Parallelkreis p , der zwischen C und D beliebig angenommen wird, die Punkte P und Q von s zu bestimmen, können wir verschiedene Methoden anwenden:

a) Kegolverfahren. Die gesuchten Punkte P und Q liegen auch auf der Eigenschaftengrenze des Kegels, der die Umdrehungsfläche in p berührt. Konstruieren wir also in bekannter Weise auf a'' die Aufrißprojektion S'' der Spitze des Berührungskegels, sowie den Schatten S_1 von S auf die Ebene von p , so sind P' und Q' die Berührungspunkte der Tangenten aus S_1 an p' .

b) Kugolverfahren. Die Punkte P und Q befinden sich ferner auf der Eigenschaftengrenze der zum Parallelkreise p gehörenden Berührungskugel. Bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt der Kugel, mit E die Ebene ihrer Eigenschaftengrenze, so geht E durch $O \perp l$ und schneidet die Ebene M_0 in einer Geraden OR , deren Aufrißprojektion auf l'' senkrecht steht. Bedeutet R den Schnittpunkt von OR mit der Ebene von p , so liegt R' auf der Parallelen durch a' zu x . Dann

schneidet E die Ebene von p in der durch R gehenden Geraden PQ ; ihre Grundrißprojektion ist das Lot von R' auf l' .

Wir ermitteln insbesondere von der Kurve s die Punkte T und U im ersten, sowie V und W im zweiten Umriß der Fläche, indem wir an die scheinbaren Umrißlinien Tangenten ziehen, die bezw. zu l' und l'' parallel sind.

Für Licht in der Richtung der Würfel diagonale ergeben sich wesentliche Vereinfachungen der soeben abgeleiteten Konstruktion. Dann ist l'_0 parallel zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten zu x parallel bezw. senkrecht sind und sich verhalten wie $\sqrt{2} : 1$. Wir erhalten also die Punkte C''_0, D''_0 und hieraus C'', D'' , ohne Benutzung des Grundrisses; denn es ist Abst. (C'', a'') gleich der Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, welches die Entfernung des Punktes C''_0 von a'' zur Hypotenuse hat. Ebenso finden wir von s'' die Punkte T'', U'' . Bezeichnen wir ferner mit Z denjenigen Punkt von s , der sich mit W auf demselben Parallelkreise befindet, so ist Z' der Schnittpunkt von a'' mit der Parallelen zu x durch W'' ; denn Z' fällt aus Symmetriegründen auf die Verlängerung von a'' . — Die fünf Punkte V'', U'', Z'', D'', W'' genügen in manchen Fällen zur angenäherten Bestimmung des sichtbaren Teiles von s'' ¹⁾.

Der Lichtstrahlenzylinder, welcher die Fläche in s berührt, schneidet Π_1 in der Schlagschattengrenze s_h , die in Bezug auf l' symmetrisch ist und aus den Schlagschatten $P_h, Q_h \dots$ der vorher gefundenen Punkte $P, Q \dots$ von s konstruiert wird. Der Schlagschatten p_h des Parallelkreises p berührt s_h in P_h und Q_h ; die Tangente von s_h in P_h ist also parallel zur Parallelkreistangente in P , d. h. $\perp a'P'$. — Der Schlagschatten des durch den höchsten Punkt C von s gehenden Parallelkreises hat mit s_h in C_h zwei zusammenfallende Berührungspunkte, d. h. vier unendlich benachbarte Punkte gemein; er ist daher der Krümmungskreis der Kurve s_h in ihrem Scheitel C_h . Ebenso ist der Krümmungsradius von s_h in $D_h = \text{Abst. } (D''_0, a'')$.

112. Dieselbe Aufgabe für die Ringfläche. Wir bezeichnen wieder mit K_0 den Mittelpunkt, mit r den Radius des Meridiankreises m_0 , mit A den Mittelpunkt des Ringes, d. h. den Fußpunkt des Lotes von K_0 auf a , und setzen $AK_0 = d$. Beschreiben wir um A mit dem Radius r eine Kugel, so schneidet eine durch a gelegte Ebene die Kugel in einem Hauptkreise i , den Ring in zwei gleich großen Kreisen m_1 und m_2 , und dann fällt der Kreis i bezw. mit m_1 oder m_2 zusammen, wenn wir ihn $\perp a$ nach der einen oder anderen Seite um die Strecke d verschieben. Dabei gelangt ein beliebiger Punkt P von i bezw. nach P_1 auf m_1 oder nach P_2 auf m_2 , so daß $PP_1 = PP_2 = d$ und $\perp a$ ist. Da die Tangenten an i, m_1, m_2 in P, P_1, P_2 parallel sind, so gilt dasselbe von den Berührungsebenen der Kugel und des Ringes in den genannten Punkten; ist also P ein Punkt der Eigenschattengrenze w der Kugel, so gehören P_1 und P_2 zur Eigenschattengrenze w des Ringes. — Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion der Kurve s' :

¹⁾ Über Schattenkonstruktionen unter alleiniger Benutzung des Aufrisses vergl. Pillet, Théorie des ombres.

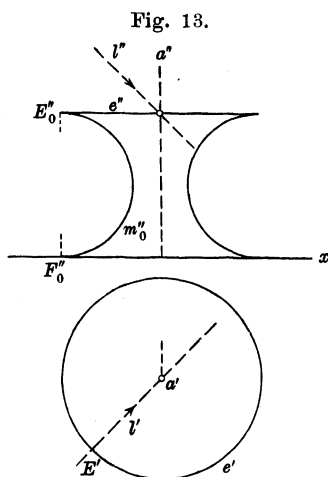
Wir beschreiben um a' mit dem Radius r den Kreis h' als ersten scheinbaren Umriß der Hilfskugel, ermitteln wie früher die Aufrißprojektion l'' des $\parallel \Pi_2$ gedrehten Lichtstrahles l und ziehen in m''_0 den Radius $K''_0 C''_0 \perp l''_0$, sowie die Tangente $C''_0 N''_0$ bis $A'' K''_0$. Als Grundrißprojektion von w erhalten wir bekanntlich eine Ellipse w' mit dem Mittelpunkt a' und der großen Halbachse $r \perp l'$; die kleine Halbachse ist gleich dem Abstände des Punktes C''_0 von der Parallelen zu a'' durch K''_0 (73). Machen wir dann auf einem beliebigen Durchmesser $P' Q'$ von w' die Strecken $P' P'_1 = P' P'_2 = Q' Q'_1 = Q' Q'_2 = d$, so sind P'_1, P'_2, Q'_1, Q'_2 vier Punkte von s' . — Die Kurve s' ist eine Konchoide der Ellipse w' .

Die Punktpaare P_1, P_2 und Q_1, Q_2 liegen in zwei Horizontalebene, die von A gleich weit entfernt sind. Wir konstruieren ihre Aufrißprojektionen mit Hilfe der zugehörigen Parallelkreise.

Auch zur Konstruktion des Schlagschattens, den der Ring auf Π_1 wirft, benutzen wir die Hilfskugel um A . Ihre Schlagschattengrenze ist eine Ellipse w_h mit dem Mittelpunkte A_h und den Halbachsen $K''_0 N''_0$ und r . Denken wir uns von den Punkten P und P_1 die Schlagschatten P_h und P_{1h} ermittelt, so wird $P_h P_{1h} \parallel P' P'_1$, also $= d$. Die Tangente von w_h in P_h ist nach 111 $\perp a' P'$, d. h. $P_h P_{1h}$ ist die Normale von w_h in P_h . Daraus folgt: Die Schlagschattengrenze s_h des Ringes ist die Parallelkurve der Ellipse w_h im Abstände d (vergl. 110).

Der Punkt R , in welchem ein Lichtstrahl die Kurve s berührt, ist ein Grenzpunkt von s insofern, als auf der einen Seite von R die Kurve s ihre physische Bedeutung als Schattengrenze verliert. In R beginnt nämlich der Schlagschatten s_* , den der entgegengesetzte Bogen

von s auf die Ringfläche wirft. Wir ermitteln ihn nach dem indirekten Verfahren (98), indem wir von einem passend gewählten Parallelkreise, etwa dem Kehlkreise, den Schlagschatten auf Π_1 konstruieren und seine Schnittpunkte mit s_h aufsuchen. Die Kurven s und s_* berühren sich in R ¹⁾. — Die Kurve s_h hat in R_h einen Rückkehrpunkt.



113. In Fig. 13 ist als Meridiankurve statt des Kreises m_0 der vorigen Aufgabe nur der Halbkreis gegeben, der durch den vertikalen Durchmesser $E_0 F_0$ begrenzt wird. Es ist außer der Eigenschattengrenze s der Umdrehungsfläche (111, 112) noch

der Schlagschatten zu konstruieren, den die Fläche von ihrem oberen Rande empfängt. Die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens bildet einen Teil der Durchdringungskurve c der Fläche

¹⁾ Näheres vergl. Wiener II, S. 183.

mit dem Lichtstrahlenzylinder, der den Parallelkreis e des Punktes E_0 zur Leitkurve hat. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die zur Lichtrichtung parallele Meridiankurve M ; ihr höchster Punkt ist also der Schatten E_* des in M liegenden Punktes E von e ($E''_0 E''_{*0} \parallel l''_0$ u. s. w.).

Um von der Kurve c die Punkte P_1 und Q_1 zu ermitteln, die einem beliebigen Parallelkreise p_1 angehören, konstruieren wir den Schatten e_1 von e auf die Ebene von p_1 ; dann sind P_1 und Q_1 die Schnittpunkte von p_1 mit e_1 .

Der auf m_0 liegende Punkt der Schlagschattengrenze ergibt sich als Schnittpunkt von m_0 mit dem elliptischen Schatten, den die Ebene des Umrißmeridians von dem vorderen Halbkreise e empfängt.

Die Grenzlinie des Schlagschattens endigt in den Schnittpunkten von c mit der Eigenschattengrenze s der Fläche. Die zugehörigen Tangenten von c sind $\parallel l$ (99).

Durchdringungen.

114. Aufgabe. Die Durchdringung einer Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, mit einer Kegelfläche zu konstruieren, deren Leitkurve k in Π_1 liegt. Um für einen beliebigen Parallelkreis p der Umdrehungsfläche seine Schnittpunkte mit dem Kegel zu ermitteln, legen wir durch die Spitze S des Kegels und durch p eine Hilfskegelfläche und konstruieren ihren Schnittkreis p_1 mit Π_1 . Schneidet p_1 die Kurve k in P_1 und Q_1 , so haben die beiden konzentrischen Kegelflächen die Mantellinien SP_1 und SQ_1 gemein, und diese treffen p in zwei Punkten P und Q der Durchdringungskurve.

115. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B zu konstruieren, deren Achsen a und b sich schneiden. Sei $a \perp \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$; die Ebene $E = a, b$ schneide A und B bezw. in den Umrißmeridianen m und n . Zur Konstruktion der Durchdringungskurve c benutzen wir als Hilfsflächen nicht, wie gewöhnlich, Ebenen, sondern Kugelflächen um den Schnittpunkt O von a und b ; denn diese erzeugen sowohl mit A als mit B die einfachsten Schnitte, nämlich Parallelkreise. Beschreiben wir als zweiten scheinbaren Umriß einer solchen Hilfskugel mit beliebigem Radius um O'' den Kreis v'' , der die Kurven m'' und n'' bezw. in P'' und Q'' schneidet, so hat die Kugel mit A und B bezw. die Parallelkreise p und q der Punkte P und Q gemein, und diese treffen sich im allgemeinen in zwei Punkten R und S von c . Wir erhalten zunächst $R'' = S''$ als Schnittpunkt der Strecken p'' und q'' und finden dann R' und S' auf dem Kreise p' . — Die Kurve c ist symmetrisch in Bezug auf E .

116. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B mit windschiefen Achsen a und b zu konstruieren. Wir nehmen wieder $a \perp \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$ und bezeichnen bezw. mit m und n die Umrißmeridiane beider Flächen. Unter Anwendung horizontaler Hilfsebenen gestaltet sich die Konstruktion der Durch-

dringungskurve c in folgender Weise: Die Hilfsebene Σ schneidet A in einem Parallelkreise p und B in einer gewissen Kurve q ; die Schnittpunkte R und S von p und q befinden sich auf c . Um die Grundrißprojektion von q zu ermitteln, zeichnen wir im Aufriß eine Reihe von Parallelkreisen $i, k \dots$ der Fläche B und bestimmen für jeden seine Schnittpunkte mit Σ . Es schneidet z. B. der Kreis i die Ebene Σ in den Punkten 1 und 2, deren Aufrißprojektionen mit dem Punkte $i'' \times \Sigma'' = 1''$ zusammenfallen. Die zugehörigen Grundrißprojektionen werden gefunden, indem wir den vorderen Halbkreis i in die Ebene von n nach i_0 umlegen. Ziehen wir dann $1'' 1'_0 \parallel b''$ bis i'_0 , so sind die Abstände der Punkte $1'$ und $2'$ von $b' = 1'' 1'_0$.

VIII. Schraubenflächen.

Kurvenerzeugung durch Rollung.

117. In der Ebene der Zeichnung sei die feste Kurve f und die bewegliche Kurve w gegeben. Dann sagen wir, die Kurve w rollt auf f , wenn sie f während ihrer Bewegung beständig berührt, und wenn der Berührungspunkt auf beiden Kurven um gleiche Bogenstücke fortschreitet. Betrachten wir beide Kurven als Vielecke mit unendlich kleinen, entsprechend gleichen Seiten, so ergibt sich sofort, daß der Übergang von w aus einer Lage in die unendlich benachbarte aufgefaßt werden kann als eine unendlich kleine Drehung um den augenblicklichen Berührungspunkt P . Denken wir uns daher mit der Kurve w einen Punkt A ihrer Ebene starr verbunden, so bewegt sich dieser momentan senkrecht zur Geraden AP . Hieraus folgt der Satz: Wird die Bewegung einer Ebene erzeugt durch das Rollen einer Kurve w auf einer anderen Kurve f , so geht für jeden Punkt der bewegten Ebene die Normale seiner Bahnkurve in jeder Lage des Punktes durch den augenblicklichen Berührungspunkt von w und f .

Die Bahnkurve des Punktes P von w hat an der mit P bezeichneten Berührungsstelle im allgemeinen einen Rückkehrpunkt, dessen Normale mit der gemeinschaftlichen Tangente von w und f zusammenfällt. Dies ergibt sich sofort, wenn wir die Kurven w und f wie vorhin durch Vielecke ersetzen.

118. Ist f eine Gerade, w ein Kreis, so beschreibt jeder Punkt der bewegten Ebene eine Zykloide, die als gespitzt (gemein), verschlungen oder geschweift (gestreckt) bezeichnet wird, je nachdem der beschreibende Punkt auf, außerhalb oder innerhalb w liegt. Sei w_0 die Anfangslage von w , M_0 der Mittelpunkt, P_0 der Berührungspunkt von w_0 mit f . Um die Zykloide zu konstruieren, die der auf $M_0 P_0$ liegende Punkt A_0 erzeugt, machen wir auf der Parallelen durch M_0 zu f die Strecke $M_0 M_n$ gleich der Peripherie von w_0 , beschreiben um M_0 mit dem Radius $M_0 A_0$ den Kreis α und teilen $M_0 M_n$ sowie α von A_0 aus in n gleiche Teile. Sind M_i und \mathcal{A}_i ein Paar entsprechender Teilpunkte, und ziehen wir $M_i A_i \parallel M_0 \mathcal{A}_i$, oder $\mathcal{A}_i A_i \parallel M_0 M_i$, so ist A_i ein Punkt der Zykloide. Seine Normale geht nach dem Be-

rührungspunkte P_i von f mit w_i , ist also $\parallel P_0 \mathfrak{A}_i$. Man erhält daher die Zykloide noch einfacher (und zumeist mit hinreichender Genauigkeit) als die Einhüllende der Kreise um $P_1, P_2 \dots$ mit den Radien $P_0 \mathfrak{A}_1, P_0 \mathfrak{A}_2 \dots$ ¹⁾.

119. Rollt umgekehrt die Gerade w aus der Anfangslage w_0 auf dem Kreise f , so beschreibt jeder Punkt von w , z. B. der augenblickliche Berührungspunkt A_0 , eine gespitzte (gemeine) Kreisevolvente. Zu ihrer Konstruktion rektifizieren wir den Kreis (79) und teilen ihn von A_0 aus in n gleiche Teile. Ziehen wir im Teilpunkte P_i die Tangente w_i und machen auf ihr die Strecke $P_i A_i = \frac{i}{n}$ der rektifizierten Peripherie, so ist A_i ein Punkt der Evolvente.

Die Kreisevolvente ist eine Spirale; sie zieht sich in unendlich vielen Windungen um den Kreis f und hat in A_0 einen Rückkehrpunkt, sowie unendlich viele Doppelpunkte auf der Verbindungslinie von A_0 mit dem Mittelpunkte M von f .

Nach 117 ist $A_i P_i$ die Normale der Evolvente in A_i ; mithin ist f die Evolute der Kurve und P_i ihr Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A_i .

Jeder Punkt außerhalb w beschreibt in Verbindung mit der rollenden Tangente eine allgemeine Kreisevolvente, die wir als verschlungenen oder geschweift bezeichnen, je nachdem der betreffende Punkt sich mit dem Punkte M auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten von w befindet. — Sei B derjenige Punkt der bewegten Ebene, dessen Anfangslage B_0 mit M zusammenfällt, und B_i die Lage, die er einnimmt, wenn w nach w_i gelangt. Ziehen wir die Gerade $MX \parallel w_0$ und setzen $MA_0 = a$, $MB_i = r$, $\angle XMB_i = \varphi$, so ist auch $\angle A_0 MP_i = \varphi$ und $MB_i = P_i A_i = a\varphi$, also ist $r = a\varphi$ die Gleichung der Bahnkurve des Punktes B ; d. h. der Punkt B beschreibt eine archimedische Spirale.

Die Schraubenlinie.

120. Die Schraubenlinie ist die kürzeste (geodätische) Linie auf dem geraden Kreiszyylinder. Bei der Abwicklung des Zylinders verwandelt sie sich also in eine Gerade, und umgekehrt entsteht durch Aufwicklung einer Ebene auf einen solchen Zylinder aus jeder Geraden der Ebene eine Schraubenlinie. — Die Achse des Zylinders heißt die Schraubenachse; sein Radius wird als Radius der Schraubenlinie bezeichnet. Die Schraubenlinie ist rechtsgängig, wenn sie für einen in die Achse (gleichgültig ob aufrecht oder verkehrt) gestellten Beschauer nach rechts abwärts geht.

Da die Verwandelte der Schraubenlinie mit den Verwandten aller Zylindermantellinien gleichen Winkel bildet, so schneidet auch die Schraubenlinie alle Zylindermantellinien unter demselben

¹⁾ Über die Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte u. s. w. vergl. Rohn und Papperitz II, S. 57; Wiener II, S. 343, sowie Burmester, Kinematik I, S. 134.

Winkel und jede zu ihnen senkrechte Ebene unter einem Winkel β , der jenen Winkel zu 90° ergänzt und Neigung der Schraubenlinie genannt wird.

Die Schraubenlinie trifft jede Mantellinie unendlich oft. Bezeichnen wir mit h den Abschnitt der Mantellinie zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten, mit r den Radius der Schraubenlinie, so ergibt sich aus der Abwicklung, daß

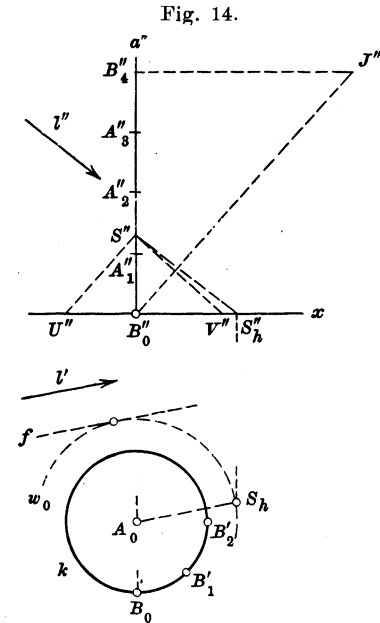
$$h = 2\pi r \tan \beta,$$

also konstant ist für alle Mantellinien. Wir nennen h die Ganghöhe der Schraubenlinie.

Bei der Geraden, welche als Verwandelte der Schraubenlinie entsteht, verhalten sich die auf den Mantellinien gemessenen Ordinaten wie die zugehörigen Abszissen. Daraus folgt: Die Schraubenlinie wird erzeugt, wenn ein Punkt sich um eine feste Achse dreht und zugleich proportional zu dieser Drehung parallel zur Achse verschiebt. — Wir bezeichnen eine solche Bewegung als Schraubung.

Gleiche Bogenstücke derselben Schraubenlinie sind kongruent; d. h. die Schraubenlinie ist in sich selbst verschiebbar. Der Krümmungsradius der Schraubenlinie ist also konstant.

121. Darstellung einer Schraubenlinie, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist (Fig. 14). Die rechtsgängige Schraubenlinie b soll vom Punkte B beschrieben werden, dessen Anfangslage B_0 in Π_1 so gewählt ist, daß ihre Verbindungsline mit dem Fußpunkte A_0 von a auf x senkrecht steht. Hierdurch,



sowie durch Angabe der Ganghöhe h ist b vollkommen bestimmt. Um einen Gang von b zu konstruieren, teilen wir den Grundkreis k des Schraubenzylinders in den Punkten $B_0, B'_1, B'_2 \dots$ in eine beliebige Anzahl, etwa 8, gleicher Teile, machen auf a die Abschnitte $A_0 A_1 = A_1 A_2 = \dots = \frac{h}{8}$ und bestimmen von den Punkten $B_1, B_2 \dots$ der Schraubenlinie die Aufrißprojektionen auf den Parallelen zu x durch $A'_1, A'_2 \dots$.

Setzen wir $B_0'' A_i'' = r$, $A_i'' B_i'' = \eta$, $\angle B_0 A_0 B_i'' = \varphi$ und verstehen unter r wie vorhin den Radius von b , so wird $\eta = r \sin \varphi$, und es verhält sich

$$\varphi : 2\pi = r : h,$$

also folgt:

$$\eta = r \sin \frac{2\pi x}{h}.$$

D. h.: Die Aufrißprojektion der Schraubenlinie ist eine Sinuskurve.

Um die Tangente der Schraubenlinie im Punkte B_i zu ermitteln, denken wir uns das auf dem Schraubenzylinder liegende Flächenstück $B_0 B_i B'_i$ in die durch $B_i B'_i$ gehende Berührungsebene abgewickelt. Dann verwandeln sich die Bogen $B_0 B'_i$ und $B_0 B_i$ bezw. in die Tangenten des Grundkreises und der Schraubenlinie in B'_i und B_i . Machen wir also auf der Tangente von k in B'_i die Strecke $B'_i T_i$ gleich dem Kreisbogen $B'_i B_0$, so ist T_i die Grundrißspur der Tangente von b in B_i .

Die Tangente von b in B_0 ist $\parallel \Pi_2$. Ihre Aufrißprojektion ist die Inflexionstangente von b'' in B''_0 ; wir erhalten sie als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $B''_0 B''_4 J''$, dessen Kathete $B''_4 J'' = \pi r$ ist. — Die Neigung β der Schraubenlinie ist gleich dem Winkel zwischen $B''_0 J''$ und x .

Der Krümmungsradius der Sinuskurve b'' im Scheitel B''_2 ist nach $81 = r \tan^2 \beta$; machen wir also auf x die Strecke $B''_0 U'' = r$ und ziehen $U'' S'' \parallel B''_0 J''$ bis a'' , sowie $S'' V'' \perp U'' S''$ bis x , so wird jener Krümmungsradius $= B''_0 V''$.

Die Strecke $B''_0 S''$ ist $= r \tan \beta$, also nach $120 = \frac{h}{2\pi}$; wir nennen sie die reduzierte Ganghöhe der Schraubenlinie.

122. Da sich die Schraubenlinie bei der Abwicklung ihres Zylinders in eine Gerade, also in eine Kurve von unendlich großem Krümmungsradius verwandelt, so folgt aus Gleichung 3) in 80, daß der Winkel zwischen der Schmiegungeebene der Schraubenlinie und der Berührungsebene des Schraubenzylinders in jedem Punkte $= 90^\circ$ ist. D. h.: Die Schmiegungeebene in irgend einem Punkte der Schraubenlinie geht durch die zugehörige Zylindernormale.

Derselbe Satz gilt übrigens von den geodätischen Linien jeder beliebigen krummen Fläche. Die geodätische Linie einer solchen Fläche ist nämlich die Gestalt, welche ein über die Fläche gespannter Faden annimmt. Nun wirken in jedem Punkte des Fadens zwei gleich große Spannungen in den Richtungen der Nachbarelemente, und ihre Mittelkraft, die nach der Regel des Kräfteparallelogrammes in der Ebene dieser Elemente, d. h. in der Schmiegungeebene, gefunden wird, muß in die Flächennormale fallen, wenn der Faden im Gleichgewichte sein soll.

123. Die Schmiegungeebene des Punktes B_0 (Fig. 14) schneidet den Schraubenzylinder in einer Ellipse, die in ihrem Scheitel B_0 denselben Krümmungskreis besitzt, wie die Schraubenlinie. Die Halbachsen dieser Ellipse sind gleich $\frac{r}{\cos \beta}$ und $A_0 B_0 = r$, folglich ist nach 67 ihr Krümmungsradius in B_0 , d. h. der Krümmungsradius der Schraubenlinie

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \beta} = U'' V''.$$

Konstruieren wir auf den Geraden $B_0 A_0, B_1 A_1 \dots$ zu den Punkten $B_0, B_1 \dots$ von b die Krümmungsmittelpunkte $C_0, C_1 \dots$, so erhalten wir eine zweite Schraubenlinie c von der Ganghöhe h und dem Radius $\varrho = r = B_0'' V''$. Ihre Neigung ist also gleich dem Winkel $S'' V'' B_0'' = 90^\circ - \beta$, ihr Krümmungsradius mithin wiederum $= V'' U''$, d. h. $= \varrho$. Die Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie c liegen daher umgekehrt auf der ursprünglichen Schraubenlinie b .

124. Schlagschatten der Schraubenlinie auf Π_1 (Fig. 14). Konstruieren wir bei gegebener Lichtrichtung l (l', l'') vom Punkte A_s den Schlagschatten A_s^h , so finden wir den Schatten von B_i , indem wir die Strecke $A_0 A_s^h$ in acht gleiche Teile teilen und durch den Teilpunkt A_i^h die Strecke $A_i^h B_i^h \parallel A_0 B_i^h$ ziehen. Dies ist aber die Konstruktion einer Zykloide, die der Punkt B_0 beschreibt, wenn der Kreis w_0 , dessen Mittelpunkt A_0 und dessen Peripherie $= A_0 A_s^h$ ist, auf der zu l' parallelen Geraden f rollt. Bezeichnet λ den Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen Π_1 , so ist $A_0 A_s^h = h \cot \lambda$, also der Radius von $w_0 = \frac{h}{2\pi} \cot \lambda$, d. h. gleich dem Schatten $A_0 S_h$ der reduzierten Ganghöhe.

Wir erhalten eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte Zykloide, je nachdem

$$A_0 B_0 \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} A_0 S_h$$

ist. Setzen wir hier für $A_0 B_0 = r$ den Ausdruck $\frac{h}{2\pi \tan \beta}$ und für $A_0 S_h$ den eben gefundenen Wert, so geht diese Bedingung über in

$$\tan \lambda \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \tan \beta.$$

Daher der Satz: Der Schlagschatten der Schraubenlinie auf eine zu ihrer Achse senkrechte Ebene ist eine Zykloide, und zwar eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte, je nachdem der Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Ebene größer ist als die Neigung der Schraubenlinie, oder gleich derselben, oder kleiner als dieselbe. — Der Schlagschatten auf jede andere Ebene ist demnach eine affine Kurve zu einer Zykloide.

Die abwickelbare Schraubenfläche.

125. Die Tangenten der Schraubenlinie b bilden eine abwickelbare Schraubenfläche, die von den Schmiegungsebenen der Kurve berührt wird (74). Die Schraubenlinie heißt die Rückkehrkurve (Rückkehrkante) ihrer Tangentenfläche, weil jeder ebene Schnitt

der Fläche die Schnittpunkte mit der Schraubenlinie im allgemeinen zu Rückkehrpunkten hat.

Bezeichnen wir nämlich mit 1, 2, 3, 4 vier unendlich benachbarte Punkte der Kurve b , mit P_1, P_2, P_3 bzw. die Punkte, in denen die Tangenten $t_1 = 12, t_2 = 23, t_3 = 34$ von einer beliebigen Ebene E getroffen werden, so sind $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ zwei Elemente der Schnittkurve von E mit der abwickelbaren Schraubenfläche, und dann bildet $P_2 P_3$ mit der Verlängerung von $P_1 P_2$ einen unendlich kleinen Winkel $d\tau$ (Fig. 15). Wählen wir aber zwischen 2 und 3 auf t_2 den Punkt Q_2 und legen durch ihn eine Ebene $\parallel E$, so schneidet diese die Elementarstreifen $t_1 t_2$ und $t_2 t_3$ bzw. in den Bogenelementen $Q_1 Q_2 \parallel P_1 P_2$ und $Q_2 Q_3 \parallel P_2 P_3$ in der Weise, daß $Q_2 Q_3$ mit dem unverlängerten $Q_1 Q_2$ den Winkel $d\tau$ einschließt. Q_2 ist also ein Rückkehrpunkt der entstehenden Schnittkurve. — Dies gilt offenbar ganz allgemein für jede abwickelbare Fläche.

Die Tangentenfläche der in Fig. 14 gegebenen Schraubenlinie b schneidet Π_1 in einer Evolvente e des Grundkreises k mit einem Rückkehrpunkte in B_0 , und sie schneidet jede zu Π_1 parallele Ebene in einer zu e kongruenten Kurve, die aus der ersten durch Schraubung um a erhalten wird. Bei dieser Schraubung beschreibt jeder Doppelpunkt von e als Doppelkurve der Fläche eine Schraubenlinie, in welcher die Fläche sich selbst durchschneidet.

Jede Berührungsebene der Fläche hat die zugehörige Tangente von b zur Falllinie und bildet mit Π_1 den Winkel β ; wir bezeichnen deshalb die abwickelbare Schraubenfläche als eine Fläche von gleichförmiger Neigung.

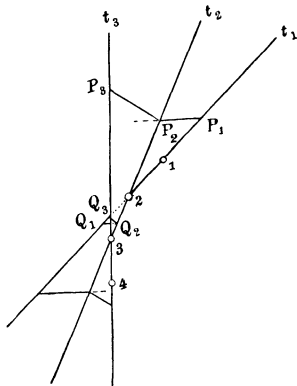
Die Inflexionstangenten der Sinuskurve b'' bilden den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche.

126. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu den Tangenten von b , so entsteht ein gerader Kreiskegel, dessen Achse zu a parallel ist: der Richtungskegel der abwickelbaren Schraubenfläche. Beide Flächen haben in entsprechenden Mantellinien parallele Berührungsebenen.

Aufgabe. Die Eigenschaftengrenze der abwickelbaren Schraubenfläche zu konstruieren, welche die Schraubenlinie b zur Rückkehrkurve hat (Fig. 14). Bei jeder abwickelbaren Fläche besteht die Eigenschaftengrenze aus Mantellinien; denn ist P ein Punkt der Eigenschaftengrenze auf der Mantellinie t und g der durch P gehende Lichtstrahl, so berührt die Ebene (t, g) die Fläche in allen Punkten von t .

Die Eigenschaftengrenzen der abwickelbaren Schraubenfläche und ihres Richtungskegels sind einander parallel. Konstruieren wir den

Fig. 15.



Richtungskegel über dem Grundkreise k , so ist S seine Spitze, und die Grenzlinien seines Eigenschattens gehen nach den Berührungspunkten F und G der Tangenten aus S_h an k . Dann erhalten wir die Grundrißprojektion der Eigenschattengrenze unserer Schraubenfläche, indem wir parallel zu A_0F und A_0G an k diejenigen Tangenten ziehen, denen auf der Schraubenfläche Mantellinien entsprechen, die selbst wieder zu SF und SG parallel sind.

127. Bei der Abwicklung der Schraubenfläche ändert sich weder das Bogenelement ds der Rückkehrkurve b , noch der Winkel $d\vartheta$ zwischen zwei aufeinander folgenden Elementen von b , also auch nicht der Krümmungsradius $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}$. Die Rückkehrkurve verwandelt sich also in einen Kreisbogen vom Radius ϱ . Für einen vollen Schraubengang ist die Bogenlänge B_0B_s gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $2\pi r$ und h , oder $= 2 \cdot B_0J''$ in Fig. 14. Die Spurevolvente e verwandelt sich in die Evolvente des Kreisbogens.

Die Schraubenflächen im allgemeinen.

128. Eine Schraubenfläche entsteht durch Schraubung einer unveränderlichen Kurve um eine Achse. Jede Schraubenfläche ist in sich selbst verschiebbar. Als Erzeugende kann jede Kurve betrachtet werden, die alle coaxialen Schraubenlinien der Fläche schneidet. Die ebenen Schnitte der Fläche, welche die Achse enthalten, heißen Meridiankurven (Profilkurven); diejenigen, welche auf der Achse senkrecht stehen, werden als Normalkurven (Basiskurven) bezeichnet. Die Meridiankurven sowohl, wie die Normalkurven gehen durch Schraubung ineinander über, sind also unter sich kongruent.

Ist von einer Schraubenfläche die Achse $a \perp \Pi_1$, die Erzeugende c (c' , c''), sowie die Ganghöhe h und der Sinn der Schraubung gegeben, so erhalten wir die zu Π_2 parallele Meridiankurve m_0 , indem wir verschiedene Punkte P , $Q \dots$ von c der Reihe nach geschraubt denken, bis sie in die betrachtete Meridianebene gelangen. Bezeichnen wir mit P_0 die neue Lage des Punktes P , so ist $a'P'_0 \parallel x$ und $= a'P'$, und die Entfernung des Punktes P'_0 von der durch P'' gehenden Horizontalen verhält sich zu h wie $\angle P'a'P'_0$ zu 360° . Wir werden daher die Grundrißprojektionen von P , $Q \dots$ zweckmäßig so wählen, daß die Winkel zwischen den Geraden $a'P'_0$, $a'P'$, $a'Q' \dots$ einfache Bruchteile von 360° betragen. — Um die in der Ebene N liegende Normalkurve n zu ermitteln, bestimmen wir von den Schraubenlinien der Punkte P , $Q \dots$ ihre Schnittpunkte P_1 , $Q_1 \dots$ mit N . Dann ist $a'P'_1 = a'P'$, und der Winkel $P'_1a'P'$ verhält sich zu 360° wie der Abstand des Punktes P'' von N'' zu h . Bei dieser Konstruktion ist es also vorteilhaft, wenn die Entfernungen der Punkte P'' , $Q'' \dots$ von der Geraden N'' zur Ganghöhe h in einem einfachen Verhältnis stehen. — Der erste wahre Umriß der Fläche wird von den Schraubenlinien derjenigen Punkte von m_0 gebildet, deren Tangenten $\parallel a$ sind. Der zweite Umriß

ist der Ort solcher Punkte des geschraubten Normalschnittes, deren Tangenten auf Π_2 senkrecht stehen.

Die Berührungsebene T der Schraubenfläche in einem Punkte B derselben ist bestimmt durch die Tangente an die durch B gehende Erzeugende, sowie durch die Tangente an die Schraubenlinie b , die der Punkt B bei der Entstehung der Fläche beschreibt. Durch Schraubung von T erhalten wir eine abwickelbare Schraubenfläche, welche die gegebene Fläche in allen Punkten von b berührt. Sie gestattet dieselbe konstruktive Verwendung, wie die Parallelkreisberührungskegel einer Umdrehungsfläche.

129. Eine Regelschraubenfläche entsteht durch Schraubung einer Geraden. Der Punkt der Erzeugenden, welcher der Achse am nächsten liegt, beschreibt die Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist abwickelbar, wenn die Erzeugende die Kehlschraubenlinie berührt; anderenfalls ist sie windschief. Bezeichnen wir mit γ den Neigungswinkel der Erzeugenden gegen eine zur Achse senkrechte Ebene, mit r ihren kürzesten Abstand von der Achse, mit h die Ganghöhe der Schraubung, so besteht im Falle einer abwickelbaren Schraubenfläche die Beziehung:

$$h = 2\pi r \tan \gamma.$$

Eine Regelschraubenfläche heißt gerade oder schief, je nachdem die Erzeugende rechtwinklig oder schief gegen die Achse gerichtet ist, und sie heißt geschlossen oder offen, je nachdem die Erzeugende die Achse schneidet oder nicht schneidet.

130. Die Normalkurve der schiefen Regelschraubenfläche. Wir gehen aus von der abwickelbaren Schraubenfläche, die durch Schraubung der Geraden t um die vertikale Achse a entsteht. Die Strecke AB , welche den kürzesten Abstand der beiden Geraden darstellt, bestimmt den Berührungspunkt B von t mit der Rückkehrkurve b . Sei ferner T der Schnittpunkt von t mit Π_1 , k der Grundkreis von b , der AB zum Radius hat; dann berührt die Grundrißprojektion $B'T$ von t den Kreis k in B' . Ziehen wir noch durch A und durch einen beliebigen Punkt C von AB die Geraden u und $v \parallel t$ und verstehen unter U und V ihre Schnittpunkte mit Π_1 , so ist $UTV \nparallel ABC$ und $\perp B'T$.

Wir lassen nun u und v an der Schraubnbewegung teilnehmen, welche t ausführt. Dann erzeugt u eine schiefe geschlossene, v eine schiefe offene Regelschraubenfläche, und wir erhalten die in Π_1 liegenden Normalkurven aller drei Flächen als die Bahnen, welche die Punkte T, U, V in Verbindung mit der auf k rollenden Tangente $B'T$ beschreiben. Daraus folgt (119): Die Normalkurve der schiefen offenen Regelschraubenfläche ist eine allgemeine Kreis-evolvente, diejenige der schiefen geschlossenen eine archimedische Spirale.

131. Die Röhrenschraubenfläche (Serpentine) ist die Einhüllende einer geschraubten Kugel. Sie wird von jeder Lage der Kugel in einem Hauptkreise berührt, dessen Ebene auf der Schrauben-

Schraubenbewegung (in Fig. 16 also entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers) um 90° drehen. Konstruieren wir in dieser Weise in Fig. 16 zu den Geraden e, t, l die Pole E, T, L , so fällt T mit P' zusammen und L liegt auf dem Kreise i . Dann ergibt sich auf Grund der vorhergehenden Darlegungen die Regel: Um auf einer Schraubenlinie k der Fläche die Punkte der Eigenschattengrenze s zu finden, ziehe man in einem beliebigen Punkte P von k die Tangente e der Erzeugenden c und bestimme in Π_1 ihren Pol E , sowie den Pol E des Lichtstrahles l . Ferner zeichne man in Π_1 den mit k' konzentrischen Kreis i durch L . Schneidet die Gerade $P'E$ den Kreis i in G und H , so geht P durch Schraubung um $\angle G A_0 L$ oder $\angle H A_0 L$ in die Punkte Q und R von s über.

Geht die Gerade EP' durch L , so ist P selbst ein Punkt der Kurve s .

134. Ist c die Normalkurve der betrachteten Schraubenfläche, so tritt an die Stelle von E der unendlich ferne Punkt des Lotes von A_0 auf e' , und die Gerade EP' wird zur Normale von e' in P' . Dann folgt aus dem letzten Satze in 133: Die Grundrißprojektion s' der Eigenschattengrenze ist der Ort derjenigen Punkte der ersten Projektionen der Normalkurven, deren Normalen durch den Punkt L gehen.

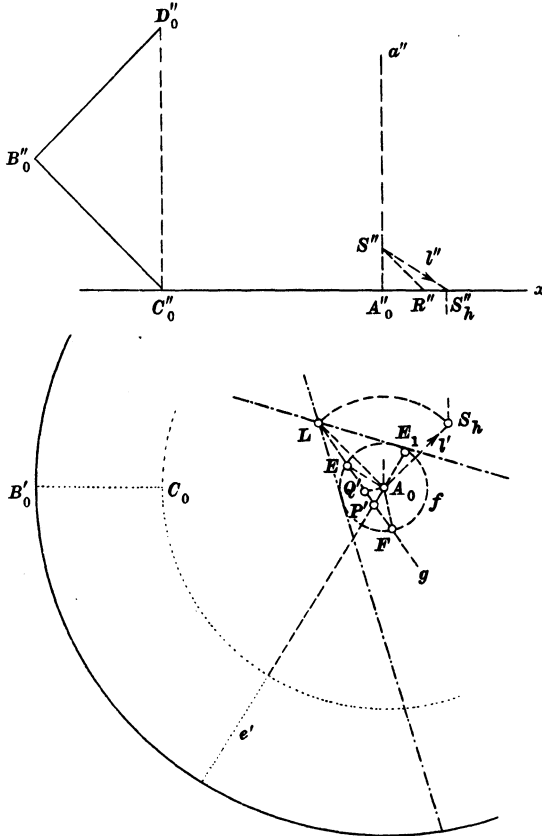
Bei der geraden geschlossenen Regelschraubenfläche wird hiernach die Kurve s' von den Fußpunkten der Lote gebildet, die von L auf die Grundrißprojektionen der Erzeugenden gefällt werden; sie ist also ein Kreis vom Durchmesser $A_0 L$. Da jener Fußpunkt den Kreis s' einmal vollständig durchläuft, während die Grundrißprojektion der Erzeugenden um A_0 eine halbe Umdrehung ausführt, so erhalten wir als Eigenschattengrenze s eine Schraubenlinie von der Ganghöhe $\frac{h}{2}$.

135. Bei der schiefen offenen Regelschraubenfläche fällt für jeden Punkt einer Erzeugenden die Tangente e mit dieser Erzeugenden zusammen, und die Punkte E_1 und E liegen für alle Erzeugenden auf einem Kreise f um A_0 . Um also für eine beliebige Erzeugende e den Punkt P zu konstruieren, den sie mit s gemein hat, ziehen wir (in genau bestimmtem Sinne) die Gerade $A_0 E \perp e'$ bis f und schneiden e' mit LE in P' .

Anwendung auf die scharfgängige Schraube. In Fig. 17 (a. f. S.) ist in der zu Π_2 parallelen Meridianebene das gleichschenklige Dreieck $B_0 C_0 D_0$ gegeben, dessen Basis $C_0 D_0$ zur Achse a parallel ist. Dasselbe erzeugt durch rechtsgängige Schraubung mit der Ganghöhe $h = C_0 D_0$ den Gewindeteil der Schraube, der also von zwei schiefen geschlossenen Regelschraubenflächen begrenzt wird. Um für die von der Strecke $B_0 C_0$ beschriebene Fläche die Eigenschattengrenze s zu konstruieren, machen wir auf a'' die Strecke $A_0'' S'' = \frac{h}{2\pi}$ und be-

stimmen wie früher die Punkte S_h und L . Wir ziehen ferner $S''R''$ || $B''_0C''_0$ bis x und beschreiben in Π_1 um A_0 mit A''_0R'' den Kreis f . Ist nun e' die Grundrißprojektion einer beliebigen Erzeugenden e , E_1 der Schnittpunkt von f mit der Verlängerung von e' über A_0 , so erhalten

Fig. 17.



wir auf f den Pol E durch Vierteldrehung von A_0E_1 entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, und dann bestimmt die Gerade LE auf e' den Punkt P' von s' . Ziehen wir umgekehrt zuerst durch L eine beliebige Gerade g , die f in E und F schneidet, so finden wir auf ihr zwei Punkte von s' , nämlich ihre Schnittpunkte P' und Q' mit den Loten in A_0 zu A_0E und A_0F . Berührt g den Kreis f , so liegen P' und Q' beide unendlich fern, d. h. die Tangenten aus L an f sind Asymptoten von s' . Gegenwärtig kommt nur der Teil von s' in Betracht, den die um A_0 durch B'_0 und C'_0 beschriebenen Kreise einschließen, und dieser kann durch die

Asymptoten angenähert ersetzt werden. — Die Kurve s' hat in A_0 einen Selbstberührungspunkt und in L einen Doppelpunkt, wie sich sofort ergibt, wenn die Gerade g durch A_0 , bzw. durch die Endpunkte des auf A_0L senkrechten Durchmessers von f gezogen wird.

IX. Windschiefe Flächen.

136. Nach 75 verstehen wir unter einer Regelfläche eine solche Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um das Gesetz dieser Bewegung in jedem einzelnen Falle festzulegen, schreiben wir am einfachsten drei bestimmte Leitkurven l_1, l_2, l_3 vor, welche die Erzeugende beständig schneiden soll. Dann erhalten wir nämlich die durch irgend einen Punkt A_1 von l_1 gehenden Erzeugenden als die

gemeinschaftlichen Mantellinien der beiden Kegelflächen, die A_1 zur Spitze und l_2 bzw. l_3 zu Leitkurven haben. Die so entstehende Regelfläche ist im allgemeinen windschief; denn sollten zwei unendlich benachbarte Erzeugende, welche mit l_1, l_2, l_3 bzw. die Punkte A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 gemein haben, einander schneiden, so müßten die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , d. h. die Tangenten der drei Leitkurven in A_1, A_2, A_3 , in einer und derselben Ebene liegen. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein; ereignet es sich für gewisse Lagen der Erzeugenden, so besitzt die Fläche in einer solchen Erzeugenden ein ebenes Flächenelement, und findet es bei besonderer Auswahl der Leitkurven für alle Erzeugenden statt, so ist die Fläche abwickelbar.

137. Verzeichnen wir auf irgend einer windschiefen Fläche eine Reihe von unendlich dicht aufeinander folgenden Erzeugenden $e, f, g, h, i \dots$ und legen durch eine derselben, etwa g , eine beliebige Ebene T , so schneidet diese die Fläche in einer Kurve s , die durch die unendlich benachbarten Schnittpunkte E, F, H, J von T mit e, f, h, i hindurchgeht. Die Kurve s wird zwischen F und H von der Geraden g in einem Punkte G getroffen, und dann ist G ein Knotenpunkt der vollständigen, aus g und s bestehenden Schnittkurve, welche T mit der Fläche gemein hat (vergl. 105, 108). Die Ebene T berührt demnach die Fläche in dem (hyperbolischen) Punkte G , und das Analoge gilt offenbar von jeder anderen, durch eine Erzeugende gelegten Ebene.

Eine eingehendere Untersuchung der Eigenschaften dieser Berührungsebenen würde die Verwendung der Geometrie der Lage erfordern, die wir hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen.

Bei den Aufgaben über ebene Schnitte, Durchdringungen u. s. w. bedienen wir uns naturgemäß stets der Erzeugenden der Fläche. Ebenso können wir die Eigenschaftengrenze nach der Methode der projizierenden Ebenen (99) wenigstens angenähert ermitteln. Genauere Konstruktionen liefert wieder die Geometrie der Lage.

138. Je nachdem sich unter den drei zur Bestimmung der Fläche erforderlichen Leitkurven gerade Linien befinden oder nicht, können wir vier Arten von windschiefen Flächen unterscheiden.

a) Sind alle drei Leitlinien gerade und sämtlich windschief zu einander, so bezeichnen wir die Fläche als ein einschaliges Hyperboloid. Wir konstruieren sie am einfachsten, indem wir durch die Leitgerade l_1 ein Ebenenbüschel legen und die Schnittpunkte jeder einzelnen Ebene mit l_2 und l_3 bestimmen; ihre Verbindungslinie ist eine Erzeugende der Fläche. Durch jeden Punkt A_1 von l_1 geht eine Erzeugende, nämlich die Schnittlinie der Ebenen A_1l_2 und A_1l_3 .

Die vorliegende Fläche, deren weitere Behandlung wir gleichfalls in die Geometrie der Lage verweisen, ist eine Verallgemeinerung des früher betrachteten einschaligen Umdrehungshyperboloids. Einen zweiten, technisch wichtigen Sonderfall bildet das hyperbolische Paraboloid, das sich ergibt, wenn die eine der drei Leitgeraden unendlich fern ist, also durch eine Richtungsebene ersetzt wird,

zu der die sämtlichen Erzeugenden parallel sind. Dann schneiden diese die beiden endlichen Leitgeraden in ähnlichen Punktreihen.

139. Durch das windschiefe Viereck $ABCD$ ist ein hyperbolisches Paraboloid bestimmt, welches AB und CD zu Leitgeraden, BC und AD zu Erzeugenden hat. Bilden wir nämlich das Parallelogramm $ADCE$, so sind die sämtlichen Erzeugenden der Fläche zur Ebene BCE parallel; ziehen wir also durch einen beliebigen Punkt K von AE die Geraden $KF \parallel EB$ und $KG \parallel EC$ bzw. bis AB und CD , so ist FG eine solche Erzeugende. Wir können aber durch dasselbe Viereck ein zweites hyperbolisches Paraboloid legen, indem wir BC und AD als Leitgeraden, AB und CD als Erzeugende und die Ebene ABE als Richtungsebene auffassen; um von ihm eine dritte Erzeugende HJ zu erhalten, ziehen wir durch irgend einen Punkt L von CE die Geraden $LH \parallel EB$ und $LJ \parallel EA$ bzw. bis BC und AD . Die Ebenen FGK und HJL schneiden sich in einer durch den Punkt $M = GK \times JL$ gehenden Geraden, die zu EB parallel ist; sie treffe FG in N , HJ in P . Dann verhält sich

$$\frac{MN}{KF} = \frac{GM}{GK}$$

und

$$\frac{KF}{EB} = \frac{AK}{AE},$$

also ist

$$MN = \frac{EB \cdot GM \cdot AK}{GK \cdot AE}.$$

Ebenso ergibt sich

$$MP = \frac{EB \cdot JM \cdot CL}{JL \cdot CE},$$

und hieraus folgt

$$MN = MP,$$

d. h. die Punkte N und P fallen zusammen. Die Erzeugende HJ des zweiten hyperbolischen Paraboloids schneidet also FG und folglich alle Erzeugenden des ersten; sie liegt demnach ganz auf diesem, und die beiden Paraboloiden decken sich vollständig. Auf dem hyperbolischen Paraboloid gibt es also zwei Scharen gerader Linien.

Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei Geraden, nämlich je eine von jeder Schar. Ihre Ebene berührt die Fläche in dem betrachteten Punkte (137).

Unter den Berührungsebenen des hyperbolischen Paraboloids befindet sich auch die unendlich ferne Ebene des Raumes; denn diese hat mit der Fläche die unendlich fernen Geraden der Ebenen ABE und BCE gemein und berührt folglich die Fläche im unendlich fernen Punkte von BE . — Alle nicht berührenden Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem sie zu BE parallel sind oder nicht.

140. b) Unter den windschiefen Flächen mit zwei Leitgeraden sind diejenigen bemerkenswert, bei denen die eine Leitgerade unendlich

fern, also wieder durch eine Richtungsebene gegeben ist. Wir bezeichnen sie als Konoidflächen und verstehen insbesondere unter einem geraden Konoid ein solches, dessen endliche Leitgerade auf der Richtungsebene senkrecht steht.

Darstellung eines geraden Kreiskonoids, das durch die vertikale Leitgerade l und den in Π_2 liegenden Kreis k bestimmt ist. Den Endpunkten A und B des vertikalen, sowie C und D des horizontalen Kreisdurchmessers entsprechen vier ebene Flächenelemente AG , BH , CE , DE mit horizontalen bzw. durch l gehenden Berührungsebenen. Die Gerade l bildet von G bis H eine Doppellinie der Fläche. — Wie man leicht beweist, schneidet jede zu Π_2 parallele Ebene das Konoid in einer Ellipse

Zu den Konoidflächen gehört auch die gerade geschlossene Regelschraubenfläche.

141. c) Von windschiefen Flächen mit einer Leitgeraden erwähnen wir die folgenden drei:

1. Die Wölbfläche des schrägen Durchganges hat zu Leitlinien zwei parallel gestellte, gleich große Kreise k_1 und k_2 und eine zu den Ebenen dieser Kreise senkrechte Gerade l durch den Mittelpunkt O der Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte M_1 und M_2 . Wir wählen k_1 in Π_2 und $M_1 M_2 \parallel \Pi_1$ und konstruieren die Fläche mit Hilfe eines Ebenenbüschels durch l . Eine Ebene desselben schneide k_1 in P_1 und Q_1 , k_2 in P_2 und Q_2 , so daß $M_1 P_1 \parallel M_2 Q_2$ und $M_1 Q_1 \parallel M_2 P_2$ ist; dann sind die zu einander parallelen Geraden $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ zwei Erzeugende der Fläche, während die Verbindungslinien $P_1 Q_2$ und $Q_1 P_2$ einem schiefen Kreiskegel mit O als Mittelpunkt angehören.

2. Das Zylindroid. Wir schneiden einen Kreiszylinder mit den Ebenen E und E_1 in den Ellipsen e und e_1 und bezeichnen als entsprechend je zwei Punkte von e und e_1 , die, wie z. B. die Punkte P und P_1 , auf derselben Mantellinie liegen. Verschieben wir die Ellipse e parallel zur Schnittlinie g von E und E_1 um eine beliebige Strecke PP_2 in die neue Lage e_2 , so bilden die Geraden, welche die Punkte von e_2 mit den entsprechenden Punkten von e_1 verbinden, ein Zylindroid. Dieses hat zur Leitgeraden die unendlich ferne Gerade der Ebene $PP_1 P_2$.

3. Die schiefe geschlossene Regelschraubenfläche.

d) Eine windschiefe Fläche ohne gerade Leitlinien ist z. B. die schiefe offene Regelschraubenfläche.

X. Grundzüge der Beleuchtungslehre.

142. Den früher ausgeführten Schattenkonstruktionen lag die Absicht zu Grunde, die Anschaulichkeit der durch Projektion erhaltenen Bilder durch Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse zu erhöhen. Wir erreichen diesen Zweck auf vollkommener Weise, wenn wir nicht nur die Grenzlinien zwischen Licht und Schatten, sondern auch die

Abstufung der Helligkeit auf den beleuchteten Oberflächenteilen zur Darstellung bringen. Dabei betrachten wir ausschließlich den Fall der Parallelbeleuchtung. Dann ist die Beleuchtungsstärke eines (ebenen) Flächenelementes proportional dem Kosinus des Winkels, den die Flächennormale mit der Lichtrichtung bildet. Bezeichnen wir diesen Einfallswinkel mit λ und setzen die Beleuchtungsstärke einer zur Lichtrichtung senkrechten Ebene $= 1$, so ist diejenige des betrachteten Flächenelementes $= \cos \lambda$. — Wir nehmen ferner an, die Oberfläche des beleuchteten Körpers sei vollkommen matt (nicht poliert), so daß sie an jeder Stelle das einfallende Licht nach allen Richtungen hin zerstreut und nicht in bestimmter Richtung reflektiert. In diesem Falle ist die Helligkeit, in welcher ein Oberflächenelement unserem Auge erscheint, unabhängig von der Schrichtung, also gleich seiner Beleuchtungsstärke $\cos \lambda$.

143. Die Helligkeit einer Ebene ist überall dieselbe.

Auf einer krummen Oberfläche bilden alle Punkte von bestimmter Helligkeit eine gewisse Kurve, welche Lichtgleiche (Isophote) genannt wird. — Die Lichtgleichen einer abwickelbaren Fläche sind ihre Erzeugenden.

Die Darstellung der Helligkeitsverteilung im Bilde einer krummen Fläche erfolgt durch Auftragen verschiedener Farbentöne. Um hierfür eine geometrische Grundlage zu gewinnen, konstruieren wir zunächst eine Anzahl von Lichtgleichen, etwa diejenigen sechs, welche den

Werten $\cos \lambda = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0$ entsprechen. Wir bezeichnen sie

mit den Zahlen 0, 1 . . . 5, indem wir durch jede Zahl den Dunkelheitsgrad ausdrücken, der zwischen der betreffenden Lichtgleiche und der nächstfolgenden durch Tuschlagen hervorzubringen ist. Auf einer nicht abwickelbaren Fläche gibt es im allgemeinen nur einzelne Punkte von der Helligkeit 1 (Helligkeitspole); die Helligkeit 0 kommt dem im Eigenschatten befindlichen Flächenteile zu. Wir können auch

für diesen Teil, entsprechend den Kosinuswerten $\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \dots$, eine Reihe

von Kurven gleicher Neigung der Flächennormale gegen den Lichtstrahl konstruieren. Um ihnen eine physische Bedeutung unterzulegen, macht man zuweilen die — allerdings ganz willkürliche — Annahme, das von der Luft und von den umgebenden Flächen in den Schattenraum hinein zerstreute Licht sei dem direkt einfallenden genau entgegengesetzt und von halb so großer Intensität wie jenes. Dann sind die eben erwähnten Kurven Orte gleicher Abnahme der Dunkelheit um je eine halbe Stufe.

144. Für die Darstellung der Helligkeit auf den meisten technischen Objekten bildet die Beleuchtung der Kugel eine bequeme Grundlage.

Die Lichtgleichen der Kugel sind Kreise, deren Ebenen auf der Lichtrichtung senkrecht stehen. Ist l der durch den Kugelmittelpunkt M gehende Lichtstrahl, O der auf ihm liegende Helligkeitspol, so erhalten wir die Mittelpunkte $M_1 \dots M_4$ der mit

1 . . . 4 bezeichneten Lichtgleichen durch Teilung der Strecke OM in fünf gleiche Teile; denn für alle Punkte des Kugelkreises, dessen Ebene z. B. in M_3 auf l senkrecht steht, bilden die zugehörigen Flächennormalen, d. h. die Kugelradien, mit l einen Winkel, dessen Kosinus gleich ist $M_3 M$, dividiert durch den Kugelradius, d. i. $= \frac{2}{5}$.

Um die Grundrißprojektion der Kreise 1, 2 . . . zu konstruieren, drehen wir den Hauptkreis i , den die erste projizierende Ebene von l aus der Kugel schneidet, um seinen horizontalen Durchmesser, bis er mit dem ersten wahren Umriß u der Kugel zusammenfällt. Dabei gelangt ein beliebiger Punkt L von l nach L^0 und l nach l^0 ($L'L^0 \perp l'$ und $= L''L_x - M''M_x$). Die Gerade l'^0 schneidet $i'^0 = u'$ in O'^0 ; durch Einteilung von $O'^0 M'$ ergeben sich die Punkte $M_1'^0, M_2'^0, \dots$. Ziehen wir in i'^0 durch $M_3'^0$ die Sehne $C_3'^0 D_3'^0 \perp l'^0$, so ist $C_3'^0 D_3'^0$ die Umlegung des in i liegenden Durchmessers des Kreises 3, und wir erhalten als Grundrißprojektion von 3 eine Ellipse $3'$ mit der großen Achse $A_3' B_3' = C_3'^0 D_3'^0$ und der kleinen Achse $C_3' D_3'$. Mit dem Umriß u hat der Kreis 3 zwei Punkte T_3, U_3 gemein; wir finden sie auf der Schnittlinie der Ebenen beider Kreise, die im Schnittpunkte E_3 von $C_3 D_3$ mit dem horizontalen Durchmesser von i auf diesem senkrecht steht ($E_3' = l' \times C_3'^0 D_3'^0, T_3' U_3' \perp l'$).

Die Ellipsen $1', 2', \dots$ sind einander ähnlich in paralleler Lage. — Die Aufrißprojektion $3''$ wird aus $3'$ in bekannter Weise konstruiert (69); für Licht in der Richtung der Würfel diagonale sind $3'$ und $3''$ kongruent.

145. Mit Hilfe der bereits gezeichneten Lichtgleichen einer Kugel konstruieren wir für dieselbe Lichtrichtung die Lichtgleichen einer beliebigen Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse a und dem Umrißmeridian m : Um für den Parallelkreis p , dessen Aufrißprojektion die Strecke $P''Q''$ ist, die Lichtgleichenpunkte zu bestimmen, ziehen wir an m'' die Tangente $P''S''$ bis a'' und parallel zu ihr an den zweiten scheinbaren Umriß der Kugel die Tangente $\mathfrak{P}''\mathfrak{S}''$ bis zur Aufrißprojektion des vertikalen Kugeldurchmessers, ferner durch den Berührungspunkt \mathfrak{P}'' die Gerade $\mathfrak{P}''Q''$ als Aufriß eines horizontalen Kugelkreises p . Dann haben Kugel und Umdrehungsfläche in je zwei Punkten von p und p , deren Verbindungslinien bezw. mit \mathfrak{S} und S einander parallel sind, parallele Berührungsebenen und folglich gleiche Helligkeit. Wir brauchen demnach nur zu den Schnittpunkten von p mit den Kugellichtgleichen die entsprechenden Punkte auf p zu ermitteln.

146. Auch die Helligkeit einer ebenen Fläche ist leicht zu bestimmen, sobald für irgend eine Hilfskugel die Lichtgleichen konstruiert sind. Sei E eine beliebige Ebene mit der Grundrißspur e_1 und dem ersten Neigungswinkel ε_1 , f eine Falllinie von E , f_0 ihre Umlegung um f' in Π_1 ($f' \perp e_1, \angle f'f_0 = \varepsilon_1$). Um auf der Hilfskugel denjenigen Punkt zu ermitteln, der dieselbe Helligkeit besitzt wie E , fallen wir vom Kugelmittelpunkte M auf E ein Lot n ($n' \perp e_1$) und bestimmen seinen Schnittpunkt P mit der beleuchteten Halbkugel. Die erste pro-

jizierende Ebene von n schneidet die Kugel in einem Hauptkreise k , den wir um seinen horizontalen Durchmesser in den horizontalen Hauptkreis u umlegen. Ziehen wir dann $M'P'_0 \perp f_0$ bis $k'_0 = u'$, so ist P' der Fußpunkt des Lotes von P'_0 auf n' .

XI. Kotierte Projektion und topographische Flächen (Grundbegriffe).

147. Wir können die Lage eines Punktes P im Raume bestimmen durch seine senkrechte Projektion P' auf eine horizontale Ebene Π (Vergleichsebene) und eine Höhenzahl (Kote), welche seine Entfernung von dieser Ebene angibt. Der Zeichnung ist immer ein Maßstab beizufügen, und die Koten der unterhalb Π liegenden Punkte sind mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Eine gerade Linie ist hiernach bestimmt durch die Projektionen und die Koten (= die kotierten Projektionen) von zwei ihrer Punkte. Sind auf der Projektion der Geraden die Punkte mit ganzzahligen Koten angegeben, so sagen wir, die Gerade sei graduirt. Der Abstand der Projektionen zweier Punkte der Geraden, deren Kotendifferenz $= 1$ ist, heißt das Intervall der Geraden.

Um die Verbindungslinie der Punkte P (5,7) und Q (8,5) zu graduieren, konstruieren wir die Umlegung der Geraden in die durch P gehende Horizontalebene und die Umlegungen der Punkte, deren Entfernungen von dieser Ebene $= 0,3$ und $1,3$ sind.

Zur Darstellung einer Ebene genügt die Angabe einer graduirten Falllinie (Gefällemaßstab, durch eine Doppellinie bezeichnet).

Um die Schnittlinie zweier Ebenen zu konstruieren, ermitteln wir die Schnittpunkte zweier Paare von Hauptlinien mit gleichen Koten.

148. Unter einer topographischen Fläche (Terrainfläche) verstehen wir einen begrenzten Teil der Erdoberfläche, der so klein angenommen wird, daß die Richtung der Schwerkraft in den einzelnen Flächenpunkten keine merklichen Unterschiede aufweist. Denken wir uns die Meeresoberfläche unter dem Festlande fortgesetzt, so dürfen wir das Stück derselben, das unter jener topographischen Fläche liegt, als eine horizontale Ebene ansehen. Wir bestimmen dann die Punkte der topographischen Fläche durch ihre kotierten Projektionen in Bezug auf diese Ebene.

Nehmen wir, von der Vergleichsebene ausgehend, in gleichen Abständen eine Reihe von Horizontalebenen an, so schneiden diese die topographische Fläche in sogenannten Niveau- oder Horizontalinien, deren Projektionen und Koten zur Darstellung der Fläche benutzt werden. Dabei treten als ausgezeichnete Flächenpunkte diejenigen hervor, die eine horizontale Berührungsebene besitzen. Wir bezeichnen sie als Gipfel- bzw. Muldenpunkte, wenn sie von den umgebenden Niveaulinien rings umschlossen werden, also höher bzw. tiefer liegen als alle Nachbarpunkte, dagegen als Sattel- oder Jochpunkte, wenn die zugehörige Berührungsebene die Fläche in einer Kurve schneidet, die im Berührungspunkte einen Knotenpunkt

hat. Im ersten Falle handelt es sich um einen elliptischen, im zweiten um einen hyperbolischen Flächenpunkt (105).

Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Falllinie oder Linie größter Neigung, welche die Niveaulinien überall rechtwinklig schneidet. In jedem Gipfel- oder Muldenpunkte treffen unendlich viele Falllinien zusammen ¹⁾.

XII. Axonometrie.

149. Axonometrie ist das Verfahren, die Parallelprojektion einer Raumfigur aus den Koordinaten ihrer Punkte zu konstruieren.

Wir bezeichnen mit Π die Projektionsebene (Zeichenebene) und denken uns die Originalfigur gegeben durch die Koordinaten ihrer Punkte in Bezug auf ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem $OXYZ$ in beliebiger Lage im Raume, oder — was auf dasselbe hinauskommt — durch ihre senkrechten Projektionen auf zwei der Koordinatenebenen $\Pi_1 = XOY$, $\Pi_2 = XOZ$, $\Pi_3 = YOZ$. Dann finden wir von irgend einem Originalpunkte P seine (senkrechte oder schiefe) Projektion \bar{P} auf die Ebene Π durch Abbildung des Koordinatenzuges $OP_xP'P$. Diese Konstruktion ist ohne weiteres ausführbar, sobald wir die Projektionen der drei Koordinatenachsen und für jede Achsenrichtung das Verhältnis zwischen Original- und Bildstrecke kennen (Verkürzungsverhältnis im Falle senkrechter Projektion).

Der Punkt \bar{P} heißt die axonometrische Projektion, das Bild \bar{P} von P' der axonometrische Grundriß von P . Durch Angabe von \bar{P} und \bar{P}' ist der Originalpunkt P bestimmt.

Je nachdem die projizierenden Strahlen auf Π senkrecht stehen oder nicht, unterscheiden wir senkrechte und schiefe Axonometrie.

Senkrechte Axonometrie.

150. Die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene Π ist bestimmt, wenn wir die Spurpunkte A, B, C der Koordinatenachsen OX, OY, OZ angeben und noch hinzufügen, auf welcher Seite von Π der Anfangspunkt O sich befinden soll. Dann ist nämlich O der Schnittpunkt dreier Halbkugeln mit den Durchmessern AB, BC, CA . — Das Spurendreieck ABC hat immer drei spitze Winkel.

Aufgabe. Die Achsenprojektionen und die Verkürzungsverhältnisse zu ermitteln, wenn das Spurendreieck ABC gegeben ist. Die Höhenlinien des Spurendreiecks sind die Achsenprojektionen. — Um den zweiten Teil der Aufgabe zu lösen, suchen wir die wahren Längen der Achsenabschnitte OA, OB, OC . Die projizierende Ebene von OC schneidet die Ebene AOB in der Falllinie OJ ($J = AB \times \bar{OC}$). Legen wir das rechtwinklige Dreieck COJ ,

¹⁾ Näheres siehe Wiener II, S. 388, sowie Rohn und Papperitz II, S. 324.

Nach der Beschaffenheit der Verhältniszahlen unterscheiden wir drei Arten von senkrechter Axonometrie:

1. isometrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen einander gleich sind (Spurendreieck gleichseitig);
2. dimetrische Projektion, mit zwei gleichen Verhältniszahlen;
3. trimetrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen verschieden sind.

152. Aufgabe. Die Verkürzungsverhältnisse und die Achsenprojektionen zu bestimmen, wenn die Verhältniszahlen l, m, n gegeben sind. Wir zeichnen, unter Zugrundelegung einer beliebigen Längeneinheit, drei Strecken von den Längen l, m, n und konstruieren die Strecke k gemäß Gleichung 4) als Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich ist $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.

Hierauf machen wir in einer neuen Figur auf einer beliebigen Geraden ST die Strecken $SU = l, SV = m, SW = n$, beschreiben um S mit dem Radius k einen Kreisbogen und bestimmen seine Schnittpunkte X, Y, Z mit den Loten, die in U, V, W zu ST errichtet sind. Dann ist $\angle XST = \alpha, \angle YST = \beta, \angle ZST = \gamma$. Machen wir daher die Strecke $SR \perp ST$ gleich der willkürlich zu wählenden Entfernung des Koordinatenanfangspunktes O von Π und ziehen durch R zu ST eine Parallele, welche die Geraden SX, SY, SZ , sowie das in S zu SZ errichtete Lot bezw. in D, E, F, G schneidet, so sind RD, RE, RF gleich den Projektionen der zwischen O und Π liegenden Achsenabschnitte, und RG ist gleich der Projektion der durch O gehenden Falllinie der xy -Ebene (vergl. 150). Konstruieren wir demnach in einer dritten Figur über der Kathete $\bar{O}J = RG$ nach entgegengesetzten Seiten die rechtwinkligen Dreiecke $\bar{O}JA$ und $\bar{O}JB$ mit den Hypotenusen $\bar{O}A = RD, \bar{O}B = RE$ und verlängern $\bar{O}J$ über \bar{O} bis C um RF , so sind $\bar{O}A, \bar{O}B, \bar{O}C$ die Projektionen und A, B, C die Spuren der x -, y - und z -Achse.

Um von einem Originalpunkte P , der durch seine Koordinaten x, y, z gegeben ist, die Projektion \bar{P} zu ermitteln, machen wir auf $\bar{O}A$ die Strecke $\bar{O}\bar{P}_x = x \cos \alpha$ und ziehen $\bar{P}_x\bar{P}' = y \cos \beta \parallel \bar{O}B$, sowie $\bar{P}'\bar{P} = z \cos \gamma \parallel \bar{O}C$. Dabei finden wir z. B. die Strecke $x \cos \alpha$ als Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf SX liegt und von S um x entfernt ist, und der die Gerade SR berührt.

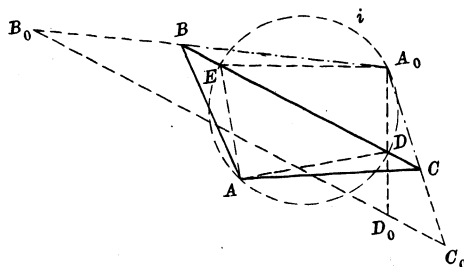
Sind die Koordinaten x, y, z durch ihre Maßzahlen gegeben, so empfiehlt sich die Konstruktion besonderer Verkürzungsmaßstäbe. Wir zeichnen zunächst den wahren Maßstab w , projizieren dessen Teilpunkte aus einem beliebig gewählten Punkte und legen zwischen zwei Strahlen, die auf w die Strecke k begrenzen, parallel zu w die Strecken l, m, n . Auf den so erhaltenen Geraden ξ, η, ζ schneiden die Strahlen des Strahlenbüschels drei Maßstäbe ein, deren Einheiten gleich sind der mit $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ multiplizierten Einheit von w .

Schiefe Axonometrie.

153. Lassen wir die Projektionsrichtung noch unbestimmt, so können wir sowohl die Achsenprojektionen als auch die Verhältniszahlen willkürlich annehmen; es gilt nämlich der Satz von Pohlke: Drei Strecken von beliebigen Längen und Richtungen, die in einer Ebene von einem Punkte ausgehen, können immer als die Projektionen dreier gleich langen, in einem Punkte rechtwinklig zusammenstoßenden Strecken angesehen werden.

Um diesen Satz zu beweisen, lösen wir zuvor die Aufgabe: Ein gerades dreiseitiges Prisma durch eine Ebene so zu schneiden, daß die entstehende Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich wird (Fig. 18). In der Zeichenebene Π sei ABC

Fig. 18.



die Grundfläche des Prismas, A_0BC das Dreieck, dem die Schnittfigur ähnlich werden soll. Wir legen die gesuchte Ebene Σ der Einfachheit wegen durch A und bezeichnen mit AB_1C_1 die entstehende Schnittfigur, mit D den Schnittpunkt von BC und B_1C_1 . — In der Ebene Σ befindet sich ein einziger rechter Winkel vom Scheitel

A , dessen senkrechte Projektion auf Π wieder ein rechter ist, nämlich der Winkel zwischen der Falllinie und der Spurlinie AD (28, 36). Ist E_1 der Schnittpunkt jener Falllinie mit B_1C_1 und E seine senkrechte Projektion auf Π , so verhält sich

$$CD : DE : EB = C_1D : DE_1 : E_1B_1,$$

d. h. den Punkten D und E_1 der Figur AB_1C_1 entsprechen in der dazu ähnlichen Figur A_0BC die Punkte D und E . Den Geraden AD und AE_1 der ersten Figur sind also die Geraden A_0D und A_0E der zweiten zugeordnet, mithin ist $\angle DA_0E = 90^\circ$. Die Punkte D und E liegen daher auf dem durch A und A_0 gehenden Kreise i , dessen Mittelpunkt sich auf BC befindet.

Hierdurch ist zunächst der Schnittpunkt D von BC mit der Spurlinie von Σ , und damit diese selbst bestimmt. Bei der Ausführung der Konstruktion haben wir unter den beiden Schnittpunkten von i und BC denjenigen mit D zu bezeichnen, für welchen der spitze Winkel DA_0C größer ist als seine senkrechte Projektion DA_0C (36).

Machen wir auf A_0D die Strecke $A_0D_0 = AD$ und ziehen durch D_0 die Gerade $B_0C_0 \parallel BC$ bis A_0B und A_0C , so wird durch das Dreieck $A_0B_0C_0$ die Schnittfigur in wahrer Größe dargestellt. Damit ist die Entfernung des Punktes B_1 von A gefunden, also die Ebene Σ (zweideutig) bestimmt.

Dreieck LMN ähnlich wird. Ist Σ eine dieser Ebenen, $X''Y''Z''$ die entstehende Schnittfigur, und sind O'' und S'' die Schnittpunkte von Σ mit OO' und SS' , so wird auch

$$X''S''Y'' \sim LJM,$$

$$Z''O''S'' \sim NQJ;$$

es ist also in der Tat die Figur $O''X''Y''Z'' \sim QLMN$.

155. Bei den praktischen Anwendungen der schiefen Axonometrie nimmt man gewöhnlich die xz -Ebene des räumlichen Koordinatensystems parallel zur Projektionsebene Π (schiefe Parallelperspektive). Dann erscheint der Winkel zwischen x - und z -Achse im Bilde wieder als Rechter, und sämtliche x - und z -Koordinaten bleiben unverändert. Für die Bilder der y -Koordinaten kann man in Übereinstimmung mit dem Pohlkeschen Satze die Richtung, sowie das Verhältnis zwischen Bild- und Originalstrecke beliebig wählen; zeichnet man sie unter einem Winkel von 30° gegen das Bild der x -Achse und auf die Hälfte verkürzt, so ergibt sich das von uns zur Herstellung von Skizzen von Anfang an benutzte Abbildungsverfahren.

Zweiter Abschnitt.

Die Zentralprojektion.

I. Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

156. Wir bezeichnen im folgenden mit Π die Bildebene, mit O das Projektionszentrum (Auge), mit A den Fußpunkt des Lotes von O auf Π ; A heißt der Hauptpunkt, die Strecke OA die Distanz des Bildes. Durch Hauptpunkt und Distanz ist die Lage des Projektionszentrums bestimmt, wenn außerdem festgesetzt wird, daß das Lot AO immer nach vorn, d. h. nach der Seite des Beschauers, errichtet werden soll. — Unter Distanzkreis verstehen wir den Kreis d , der in Π um A mit dem Radius OA beschrieben wird.

Die Zentralprojektion einer Figur wird auch deren Perspektive genannt.

157. Die Projektion des Punktes P , also der Schnittpunkt von OP mit Π , soll mit P_c bezeichnet werden. Durch Angabe von P_c ist der Originalpunkt noch nicht bestimmt.

Das Bild eines unendlich fernen Punktes ist im allgemeinen ein endlicher Punkt. Jedem Punkte der Ebene Π^v , die durch $O \parallel \Pi$ gelegt wird, entspricht ein unendlich ferner Bildpunkt. Wir nennen Π^v die Verschwindungsebene.

158. Die Projektion einer Geraden g ist im allgemeinen wieder eine Gerade, nämlich die Schnittlinie g_c der projizierenden Ebene Og mit Π . Geht die Originalgerade durch O , so ist ihre Projektion ein Punkt.

Die Geraden g und g_c schneiden sich im Spurpunkte G . Dem unendlich fernen Punkte G^∞ der Originalgeraden entspricht auf g_c ihr Fluchtpunkt G_c^∞ ; dabei ist $OG_c^\infty \parallel g$. — Die Bilder paralleler Geraden gehen durch einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Durch Spur- und Fluchtpunkt ist die Originalgerade bestimmt. — Ein Punkt im Raume ist bestimmt durch sein Bild und durch Spur- und Fluchtpunkt einer durch ihn gehenden Geraden.

Der Schnittpunkt G^v der Originalgeraden g mit Π^v heißt ihr Verschwindungspunkt. Ihm entspricht der unendlich ferne Punkt von g_c , und es ist $OG^v \parallel g_c$. — Originalgeraden, die sich in Π^v schneiden, haben parallele Bilder.

Spezielle Fälle. a) Ist $g \parallel \Pi$, so ist $g_c \parallel g$. Dann verhalten sich die Abschnitte auf g_c wie die entsprechenden Abschnitte auf g . In diesem Falle ist zur Festlegung von g außer der Geraden g_c noch irgend ein Punkt von g erforderlich, der seinerseits wieder in der vorher angegebenen Weise bestimmt wird.

b) Der Hauptpunkt A ist der Fluchtpunkt aller Normalen zu Π .

159. Eine Ebene E wird bestimmt durch irgend zwei ihrer Geraden, am zweckmäßigsten durch ihre Spurlinie e und ihre unendlich ferne Gerade (Stellung) e^∞ , die selbst wieder durch ihr Bild e_c^∞ , d. h. die Schnittlinie von Π mit der Parallelebene durch O zu E gegeben wird. Die Gerade e_c^∞ heißt die Fluchtlinie von E ; sie ist $\parallel e$. — Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtlinie.

Die Ebene E schneidet Π^v in ihrer Verschwindungslinie e^v .

Spezielle Fälle. a) Geht E durch O , so fallen e und e_c^∞ zusammen, und die Bilder aller Punkte von E liegen auf e .

b) Ist $E \parallel \Pi$, so sind e und e_c^∞ unendlich fern, und die Ebene wird bestimmt durch Angabe eines ihrer Punkte. Dann entspricht jeder in E liegenden Figur ein dazu ähnliches Bild.

c) Ist $E \perp \Pi$, so geht e_c^∞ durch A .

160. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen Spur-, Flucht- und Verschwindungspunkt der Geraden bzw. in der Spur-, Flucht- und Verschwindungslinie der Ebene.

Daraus folgt: Wenn zwei Geraden einander schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Spurpunkte parallel zur Verbindungslinie ihrer Fluchtpunkte.

II. Perspektive eines durch Grund- und Aufrifs gegebenen Gegenstandes.

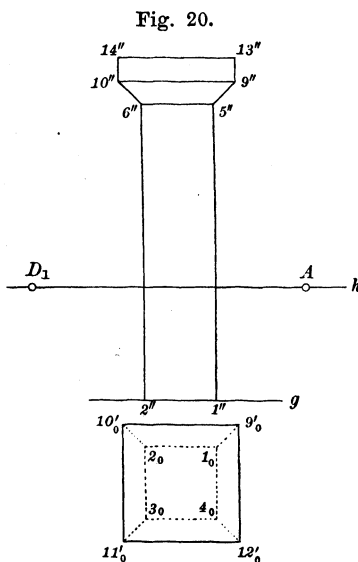
161. Um von allen vertikalen Geraden parallele und vertikale Bilder zu erhalten, stellen wir die Bildebene Π im folgenden immer vertikal.

Eine durch O gelegte horizontale Ebene, die Horizontebene, schneidet Π in einer durch A gehenden horizontalen Geraden h , dem Horizont des Bildes. Die Gerade h ist die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen. Sie schneidet den Distanzkreis d in den beiden Distanzpunkten D_1, D_2 , den Fluchtpunkten solcher horizontalen Geraden, die mit Π einen Winkel von 45° einschließen.

Die Spurlinie g der horizontalen Grundrißebene Π_1 (Bodenebene) heißt die Grundlinie des Bildes.

Je nachdem die Bildebene zu einer Hauptfläche des dargestellten Gegenstandes parallel ist oder nicht, spricht man von einer geraden oder schrägen Ansicht des Gegenstandes.

162. Darstellung eines Pfeilers in gerader Ansicht (Fig. 20). Der Pfeiler hat zur Grundfläche ein in der Bodenebene Π_1 liegendes Quadrat, von welchem zwei Seiten 1 2 und 3 4 zur Grundlinie g parallel sind. Er ist gegeben durch seine Aufrißprojektion auf die



Zeichenebene Π und seine Grundrißprojektion auf die Ebene Π_1 , die wir mit dem hinteren Teile nach unten um g in Π umlegen, so daß die Figur $1_0 2_0 \dots 9_0 \dots$ den Grundriß in der gedrehten Lage darstellt. Zur Festlegung des Projektionszentrums O benutzen wir den Hauptpunkt A und den Distanzpunkt D_1 .

Die unbegrenzten Geraden 1 4 und 2 3 haben den Fluchtpunkt A und die Spuren $1''$ und $2''$, mithin zu Bildern die Geraden $1''A$ und $2''A$. Der Diagonale 1 3 entspricht D_1 als Fluchtpunkt und der Schnittpunkt C von $1_0 3_0$ mit g als Spur; dann bestimmt die Bildgerade CD_1 auf $1''A$ und $2''A$ die Bilder 1_c und 3_c der Punkte 1 und 3. Die Geraden $1_c 2_c$ und $3_c 4_c$ sind $\parallel g$. Die Bilder der vertikalen Pfeilerkanten 1 5, 2 6 \dots sind gleichfalls vertikal;

ihre Endpunkte $5_c, 6_c \dots$ liegen auf der Geraden $5''A$ und $6''A$. Verlängern wir die Gerade $9_0 12_0$ bis zu ihrem Schnittpunkte E mit g , so trifft EA die Gerade CD_1 in 9_c , dem perspektiven Grundriß des Punktes 9. Die Vertikale durch 9_c schneidet $9''A$ und $13''A$ in 9_c und 13_c .

Wir ermitteln zur Kontrolle noch die Fluchtpunkte $B_1, B_2 \dots$ der vier schrägen Kanten 5 9, 6 10 \dots . In B_1 trifft der Sehstrahl, der durch $O \parallel 5 9$ gezogen wird, die Bild- und Aufrißebene Π ; B_1 liegt also erstens auf der Aufrißprojektion dieses Sehstrahles, d. h. auf der Parallelen durch A zu $5'' 9''$. Da ferner OD_1 die senkrechte Projektion des Sehstrahles auf die Horizontebene darstellt, so befindet sich B_1 zweitens auf dem Lot in D_1 zu h . — Die vier Fluchtpunkte bilden in der Reihenfolge $B_1 B_2 B_4 B_3$ ein Rechteck, in welchem $B_1 B_2 \parallel h$ und

D_1 der Mittelpunkt von $B_1 B_3$ ist. Sind die schrägen Flächen des Kapitāls unter 45° gegen Π_1 geneigt, so ist $D_1 B_1$ gleich der Distanz $A D_1$.

163. Darstellung eines Hauses in schräger Ansicht. In Fig. 21 a ist das Haus, dessen Grundfläche 1 2 3 4 in Π_1 liegt, in Grund- und Aufriß gegeben; ebenso ist das Projektionszentrum O durch O' und O'' und die Lage der (auf Π_1 senkrechten) Bildebene Π durch die Grundlinie g bestimmt. Die Perspektive des Hauses soll in Fig. 21 b gezeichnet werden, in der also die Ebene Π mit der Zeichenfläche zusammenfällt. Hier ist der Hauptpunkt A beliebig angenommen worden; alles übrige ist durch die vorige Figur vollkommen bestimmt.

Erste Lösung. Wir ziehen in Fig. 21 b durch A die Horizontlinie h , machen $AA' \perp h$ und gleich dem Abstände des Punktes O'' von x in Fig. 21 a und legen durch A' die Grundlinie $g \parallel h$. Dann ist der Punkt A' die Grundrißprojektion von A ; ihm entspricht in Fig. 21 a der Fußpunkt des Lotes von O' auf g .

Um zunächst das Rechteck 1 2 3 4 abzubilden, bestimmen wir in Fig. 21 a von den Geraden 1 4 und 2 3 die Spurpunkte S und T , sowie den gemeinsamen Fluchtpunkt F ($O'F' \parallel 14$ bis g) und übertragen die erhaltenen Punkte unter Benutzung von A' und A bzw. nach g und h in Fig. 21 b. Der Fluchtpunkt von 1 2 ist unerreichbar; deshalb ermitteln wir auf SF das Bild 1_c von 1 mit Hilfe des projizierenden Strahles $O1$. Die Gerade $O'1$ (Fig. 21 a) schneidet g in der Grundrißprojektion 1 von 1_c ; ermitteln wir hierzu den entsprechenden Punkt in Fig. 21 b, so liegt 1_c auf dem Lot, das in 1 zu g errichtet wird. In derselben Weise finden wir die Punkte $2_c \dots$; wir können aber auch 2_c und 4_c mittels der Diagonale 2 4 konstruieren, deren Bild durch Spupunkt R und Fluchtpunkt E bestimmt wird ($O'E' \parallel 24$ bis g).

Die Bilder der vertikalen Kanten 1 5, 2 6 ... sind $\perp g$. Errichten wir in S zu g das Lot $SU = 1''5''$, so ist U die Spur, UF das Bild der unbegrenzten Geraden 5 8, und dieses schneidet die durch 1_c und 4_c gehenden Vertikalen in 5_c und 8_c . Noch vorteilhafter ist es, die Diagonale 6 8 abzubilden, indem wir $RZ = 1''5'' \perp g$ ziehen und Z mit E verbinden¹⁾.

¹⁾ Die Gerade $5_c 6_c$ geht nach dem unerreichbaren Schnittpunkt von h und $1_c 2_c$. Um solche Linien zu ziehen, empfiehlt sich bei komplizierteren

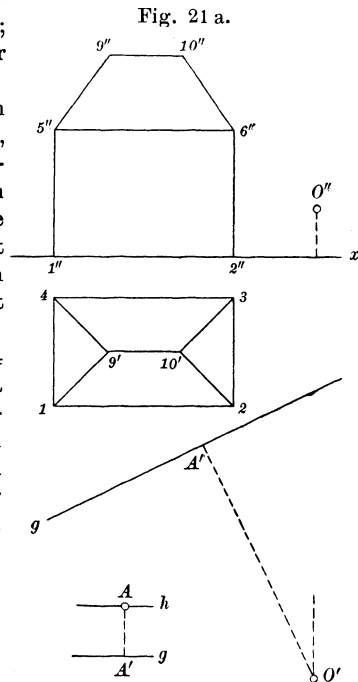


Fig. 21 b.

Wir konstruieren schließlich von einem Endpunkt des Dachfirstes, z. B. von 9, das Bild 9_c mit Hilfe des Bildes der Parallelen durch 9 zu 14. Bezeichnen wir mit V den Spurpunkt dieser Parallelen, so finden wir aus Fig. 21a seine Grundrißprojektion V' ; machen wir darauf in Fig. 21b $V'V \perp g$ und $= \text{Abst. } (9'', x)$, so ist VF das Bild der genannten Hilfslinie. In Fig. 21a bestimmt ferner die Gerade $O'9'$ auf g den Grundriß 9 des Punktes 9_c ¹⁾; dann schneidet in Fig. 21b die durch den entsprechenden Punkt gehende Vertikale die Gerade VF in 9_c .

Wir können übrigens auch die Fluchtpunkte der schrägen Kanten des Daches leicht ermitteln. So erhalten wir in Fig. 21a den Fluchtpunkt W der Kante 6 10 als den Schnittpunkt der durch O gehenden Parallelen zu dieser Geraden mit der Ebene Π . Übertragen wir den Punkt W' auf g in Fig. 21b, so ist $WW' \perp g$ und $= \text{Abst. } (W'', x)$.

164. Zweite Lösung. Um die Ausführung der Konstruktion auf eine einzige Figur zu beschränken, denken wir uns in Fig. 21b die Grundrißebene Π_1 mit dem hinteren Teile nach unten in die Zeichenebene Π umgelegt. Dann gelangt O' nach O'_0 auf der Geraden $A'A$, und der Grundriß des Hauses kommt in die Lage $1_0 2_0 3_0 4_0 9_0 10_0$; dabei ist $A'O'_0 = A'O'$ der Fig. 21a, d. h. gleich der gegebenen Distanz, und $\angle A'S1_0 = \angle A'S1$.

Um den Fluchtpunkt F von 14 zu ermitteln, ziehen wir $O'_0F' \parallel 1_0 4_0$ bis g und $F'F \perp g$ bis h ²⁾. Die Gerade $O'_0 1_0$ ist die Umlegung der Grundrißprojektion des Sehstrahles $O1$ und bestimmt auf g den Punkt 1. Das Weitere wie bei der ersten Lösung.

165. In derselben Weise, wie wir in 163 den Punkt 5_c mit Hilfe des Punktes 1_c und der wahren Länge der Strecke 15 ermittelt haben, lösen wir überhaupt ganz allgemein die Aufgabe: Die Projektion P_c des Punktes P zu bestimmen, wenn sein perspektiver Grundriß P'_c und seine wahre Entfernung z von der Ebene Π_1 (g, h) bekannt sind. Wir ziehen durch P'_c eine beliebige Gerade, die g in S , h in F schneidet, und betrachten sie als Bild einer in Π_1 liegenden Geraden mit der Spur S und dem Fluchtpunkte F . In S errichten wir zu g das Lot $SU = z$ und ziehen UF als Bild einer horizontalen Geraden, die zur ersten im Abstände z parallel ist. Dann ist P_c der Schnittpunkt von UF mit dem Lote in P'_c zu g .

Ein Punkt im Raume ist hiernach auch bestimmt durch sein Bild und seinen perspektiven Grundriß. Diese Art, einen Punkt festzulegen, tritt in der angewandten Perspektive zumeist an

Figuren die Anwendung der Fluchtpunktschiene. Vergl. R. Mehmke, Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene, Zeitschr. für Mathematik und Physik, Bd. 42, 1897, S. 99.

¹⁾ Wir bezeichnen allgemein mit P die Grundrißprojektion der Perspektive P_c des Punktes P und mit P'_c die Perspektive der Grundrißprojektion P' von P oder den perspektiven Grundriß von P .

²⁾ Legen wir auch die Horizontebene, und zwar in demselben Sinne wie vorher Π_1 , in die Zeichenebene um, so erhalten wir die neue Lage O_0 von O , indem wir die Distanz von A aus auf die Verlängerung von $A'A$ abtragen. Dann ist O_0F die Umlegung von OF , und wir finden also den Fluchtpunkt F direkt als Schnittpunkt von h mit der Parallelen durch O_0 zu $1_0 4_0$.

die Stelle der in der theoretischen („freien“) Perspektive gebräuchlichen Bestimmungsweise, bei welcher ohne Bezugnahme auf eine Grundrißebene der Punkt definiert ist durch sein Bild und durch Spur- und Fluchtpunkt einer ihn enthaltenden Geraden — oder, was auf dasselbe hinauskommt, Spur- und Fluchtlinie einer durch ihn gehenden Ebene (158).

166. Schattenkonstruktionen. Der leuchtende Punkt L sei durch sein Bild L_c und seinen perspektiven Grundriß L'_c in Bezug auf die Ebene $\Pi_1 = g, h$ gegeben. Der Schatten, den der Punkt $P(P_c, P'_c)$ auf Π_1 wirft, ist der Schnittpunkt P^* der Geraden LP und $L'P'$, also ist im Bilde $P^* = L_c P_c \times L'_c P'_c$.

Bei Parallelbeleuchtung sind L_c und L'_c bzw. die Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrißprojektionen. Dann liegt L'_c auf h , ist also der Fußpunkt des von L_c auf h gefällten Lotes. — Betrachten wir als unendlich ferne Lichtquelle die Sonne, so wird durch einen oberhalb h liegenden Punkt L_c das Bild des Mittelpunktes der vor dem Beschauer stehenden Sonne dargestellt; liegt aber L_c unterhalb h , so befindet sich die Sonne hinter dem Beschauer, und zu L_c gehört nur ein virtuelles Sonnenbild. In dem besonderen Falle, daß die Lichtstrahlen zur Bildebene parallel laufen, sind mit ihnen auch ihre Bilder parallel und die Bilder ihrer Grundrißprojektionen parallel zu g (Streiflicht).

Ermitteln wir von dem in Fig. 21 b dargestellten Hause den Schatten auf die Π_1 , so gehen die Schatten der vertikalen Kanten im Bilde nach L'_c , und die Schatten der horizontalen Kanten laufen nach den Fluchtpunkten dieser Kanten.

III. Fortsetzung der freien Perspektive: Ebene Figuren.

Aufgaben über Geraden und Ebenen.

167. Konstruieren wir von einer in der Ebene E liegenden Figur $PQR \dots$ die Zentralprojektion $P_c Q_c R_c \dots$, so stehen Original- und Bildfigur in folgender Beziehung: Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt, nämlich durch das Projektionszentrum O , und alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Spurlinie e der Originalebene. Solche Figuren heißen nach 52 kollinear in perspektiver Lage (perspektiv kollinear); O ist das Kollineationszentrum, e die Kollineationsachse, PP_c ein Kollineationsstrahl. Nach Aufhebung der perspektiven Lage nennen wir die Figuren einfach kollinear.

168. Konstruktion des Bildes einer ebenen Figur. Das Projektionszentrum O sei gegeben durch Hauptpunkt A und Distanzkreis d , die Originalfigur \mathfrak{F} durch die Spur e und die Fluchtlinie e^∞ ihrer Ebene E und durch ihre Umlegung \mathfrak{F}_0 um e in Π , wobei noch hinzugefügt werden muß, welcher Teil von E sich hinter der Ebene Π befindet. Sei g_0 irgend eine Gerade von \mathfrak{F}_0 , so kennen wir von der

Bildgeraden g_c zunächst den Spurpunkt $G = e \times g_0$. Der zugehörige Fluchtpunkt G_c^∞ ist der Schnittpunkt von e_c^∞ mit der Parallelen durch O zu g . Um ihn zu ermitteln, drehen wir die Ebene (O, e_c^∞) um e_c^∞ in demselben Sinne wie E , bis sie mit Π zusammenfällt. Bezeichnen wir mit O_0 die neue Lage von O , mit F_c^∞ den Schnittpunkt von $A O_0$ und e_c^∞ , so ist $A O_0 \perp e_c^\infty$ und $F_c^\infty O_0 = F_c^\infty O$, d. h. gleich der Hypotenuse $F_c^\infty O^0$ des rechtwinkligen Dreiecks $A F_c^\infty O^0$, dessen Eckpunkt O^0 auf d liegt. Dann erhalten wir als Umlegung von $O G_c^\infty$ die Gerade $O_0 G_c^\infty \parallel g_0$ und damit $g_c = G G_c^\infty$.

Der Punkt F_c^∞ ist der Fluchtpunkt aller Falllinien von E (Hauptfluchtpunkt der Ebene).

169. Um zu irgend einem Punkte P_0 der umgelegten Original-ebene das Bild P_c zu konstruieren, ziehen wir durch ihn zwei Geraden h_0 und i_0 als Umlegungen zweier Geraden h und i von E und bestimmen zu diesen in der eben entwickelten Weise die Bilder h_c und i_c ; dann ist $P_c = h_c \times i_c$. Benutzen wir dabei als h_0 die Verbindungslinie von P_0 mit O_0 , so fällt h_c mit h_0 zusammen, d. h. $O_0 P_0$ ist eine selbstentsprechende Gerade und enthält deshalb auch den Punkt P_c . Daraus folgt der Satz: Legt man eine ebene Figur um die Spurlinie ihrer Ebene und das Projektionszentrum in demselben Sinne um die zugehörige Fluchtlinie in die Bildebene um, so sind Bild und Umlegung der Originalfigur perspektiv kollinear für das umgelegte Projektionszentrum als Kollineationszentrum und die Spurlinie der Original-ebene als Kollineationsachse.

170. Die Ebene E schneidet die Verschwindungsebene Π^v in der Verschwindungslinie $e^v \parallel e$. Verstehen wir unter F und F^v bzw. die Schnittpunkte von e und e^v mit der zu e_c^∞ senkrechten Ebene $O A F_c^\infty$, so ist $O F_c^\infty F F^v$ ein Parallelogramm; wir erhalten demnach die Umlegung von e^v , indem wir auf $F F_c^\infty$ die Strecke $F F_0^v = F_c^\infty O_0$ machen und durch F_0^v die Gerade $e_0^v \parallel e$ ziehen.

Der Schnittpunkt von g_0 und e_0^v ist der umgelegte Verschwindungspunkt G_0^v von g . Da der zugehörige Bildpunkt G_c^v auf g_c unendlich fern liegt, so ist nach 169 $O_0 G_0^v \parallel g_c$. Hieraus ergibt sich eine zweite Konstruktion der Bildgeraden g_c mittels der Punkte G und G_0^v .

171. Die Teilungspunkte der Geraden. Aufgabe. Auf dem Bilde $g_c = G G_c^\infty$ der Geraden g vom Punkte P_c aus eine Strecke abzutragen, deren wahre Länge $= l$ ist. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich zunächst die folgende Lösung: Wir ziehen durch G und G_c^∞ in beliebiger Richtung zwei Parallelen e und e_c^∞ als Spur- und Fluchtlinie einer durch g gehenden Ebene E , die wir um e in die Bildebene umlegen. Konstruieren wir, wie in 168, vom Projektionszentrum O die Umlegung O_0 um e_c^∞ , so geht die Umlegung g_0 von g durch $G \parallel O_0 G_c^\infty$, und die Gerade $O_0 P_c$ schneidet g_0 in P_0 . Machen wir dann auf g_0 die Strecke $P_0 Q_0 = l$, so bestimmt die Gerade $O_0 Q_0$ auf g_c den Endpunkt Q_c der gesuchten Bildstrecke.

Bei dieser Konstruktion ist die Strecke $O_0 G_c^\infty$ gleich der Entfernung des Projektionszentrums O vom Fluchtpunkte G_c^∞ , also unabhängig von

der Richtung, die wir der Geraden e_c^∞ erteilen; wir finden sie unmittelbar durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks $OA G_c^\infty$ in Π ($AO_* \perp AG_c^\infty$ bis d , $O_0 G_c^\infty = O_* G_c^\infty$). Die Geraden e und e_c^∞ sind demnach überhaupt überflüssig, und wir gelangen somit zu der folgenden vereinfachten Lösung: Man ziehe durch den Fluchtpunkt G_c^∞ und durch den Spurpunkt G der Geraden in beliebiger Richtung zwei Parallelen, mache auf der ersten die Strecke $G_c^\infty O_0$ gleich der Entfernung des Projektionszentrums von G_c^∞ und bestimme den Schnittpunkt P_0 der Geraden $O_0 P_c$ mit der zweiten Parallelen. Auf dieser mache man $P_0 Q_0 = l$ und schneide g_c mit $O_0 Q_0$ in Q_c .

Dasselbe Verfahren dient umgekehrt zur Bestimmung der wahren Länge der Strecke $P_c Q_c$.

Ist von vornherein von irgend einer durch g gehenden Ebene E die Spur e und die Fluchtlinie e_c^∞ gezeichnet, so benutzen wir zweckmäßig diese Geraden an Stelle der vorhin gezogenen Parallelen, machen also auf e_c^∞ die Strecke $G_c^\infty O_1$ (oder $G_c^\infty O_2$) $= G_c^\infty O$ und bestimmen auf e die Punkte P_1 und Q_1 in derselben Weise, wie zuvor die Punkte P_0 und Q_0 . Dann heißen O_1 und O_2 die Teilungspunkte der Geraden g hinsichtlich der Ebene E .

Die Teilungspunkte der Geraden g hinsichtlich aller durch sie gehenden Ebenen erfüllen den Teilungskreis t von g , der G_c^∞ zum Mittelpunkt hat.

Die Distanzpunkte D_1, D_2 sind die Teilungspunkte jeder Normalen zur Bildebene hinsichtlich der durch die Gerade gehenden Horizontalebene.

Nach der Methode des Teilungspunktes finden wir bei der in 163 behandelten Aufgabe die Punkte $1_c \dots$ des perspektiven Grundrisses ohne Benutzung der zugehörigen projizierenden Strahlen. Um nämlich auf der Bildgeraden SF die Längen $S1$ und 14 in perspektiver Verkürzung abzutragen, machen wir auf der Grundlinie die Strecke $S1_1 = S1$ und $1_1 4_1 = 14$ und auf dem Horizont in entgegengesetztem Sinne $FO_1 = FO$, d. h. $= F'O'$ (Fig. 21a). Dann ist O_1 ein Teilungspunkt der Geraden 14 hinsichtlich der Ebene Π_1 ; wir erhalten also 1_c und 4_c , indem wir die Punkte 1_1 und 4_1 von O_1 aus auf SF projizieren.

172. Um die Strecke PQ im Bilde in eine Anzahl, z. B. drei, gleicher Teile zu teilen, ist die Konstruktion des Teilungspunktes nicht erforderlich. Wir ziehen einfach durch den einen Endpunkt P_c der Bildstrecke $P_c Q_c$ und durch ihren Fluchtpunkt G_c^∞ in beliebiger Richtung bzw. die Parallelen a und b , tragen auf a eine beliebige Länge von P_c aus dreimal ab, wodurch die Punkte H, J, K erhalten werden, schneiden b mit $K Q_c$ in L und bestimmen die Schnittpunkte R_c und S_c von $P_c Q_c$ bzw. mit LH und LJ . — Betrachten wir nämlich b als die Fluchtlinie einer durch PQ gehenden Ebene, so ist $P_c K$ das Bild einer in drei gleiche Teile geteilten Hauptlinie derselben, und den Geraden LH, LJ, LK entsprechen parallele Originalgeraden; also ist $PR = RS = SQ$.

173. Die reduzierten Punkte. Die bisher entwickelten Regeln bedürfen einer Ergänzung für den Fall, daß gewisse, zur Durchführung

der Konstruktion notwendige Punkte außerhalb des Rahmens der Zeichenfläche liegen. Wir betrachten z. B. die Aufgabe: Gegeben ist das Projektionszentrum O durch Hauptpunkt A und Distanz, eine Ebene E durch e , e_c^∞ und in ihr die Gerade g durch ihre Umlegung g_0 ; man soll die Bildgerade g_c konstruieren und auf ihr vom Spurpunkte G aus eine Strecke von der wahren Länge l abtragen. Nach 168 fällen wir zunächst von A auf e_c^∞ das Lot AF_c^∞ und bestimmen auf ihm das umgelegte Projektionszentrum O_0 . Ist nun die Distanz so groß, daß O_0 un erreichbar wird, so machen wir auf $F_c^\infty A$ die Strecke $F_c^\infty \frac{A}{n} = \frac{1}{n} F_c^\infty A$, ferner $\frac{A}{n} \frac{O_0}{n} \perp F_c^\infty \frac{A}{n}$ gleich dem n^{ten} Teile der Distanz und auf der Verlängerung von AF_c^∞ die Strecke $F_c^\infty \frac{O_0}{n} = F_c^\infty \frac{O_0}{n}$; dabei ist die Zahl n so zu wählen, daß alle genannten Punkte innerhalb der Zeichenfläche liegen. Ziehen wir dann $\frac{O_0}{n} \frac{G_c^\infty}{n} \parallel g_0$ bis e_c^∞ und machen auf e_c^∞ die Strecke $F_c^\infty G_c^\infty = n \cdot F_c^\infty \frac{G_c^\infty}{n}$, so ist G_c^∞ der Fluchtpunkt von g , also $g_c = G G_c^\infty$. — Die Punkte $\frac{A}{n}$, $\frac{G_c^\infty}{n}$... heißen reduzierter Hauptpunkt, reduzierter Fluchtpunkt u. s. w.

Um auf g_c den Punkt P_c zu ermitteln, dessen wahre Entfernung von $G = l$ ist, bestimmen wir auf e_c^∞ den Teilungspunkt O_1 von $g \left(G_c^\infty O_1 = n \cdot \frac{G_c^\infty}{n} \frac{O_0}{n} \right)$, sowie auf e den Punkt P_1 ($GP_1 = l$) und ziehen $O_1 P_1$. Machen wir statt dessen auf e_c^∞ und e die Strecken $G_c^\infty \frac{O_1}{n} = \frac{G_c^\infty}{n} \frac{O_0}{n}$, $G \frac{P_1}{n} = \frac{l}{n}$, so geht auch die Gerade $\frac{O_1}{n} \frac{P_1}{n}$ durch den gesuchten Punkt P_c ; dabei ist $\frac{O_1}{n}$ der reduzierte Teilungspunkt von g .

Wird auch der Fluchtpunkt G_c^∞ un erreichbar, so finden wir die Bildgerade g_c mit Hilfe des reduzierten Spurpunktes $\frac{G}{n} \left(F_c^\infty \frac{G}{n} = \frac{1}{n} F_c^\infty G \right)$; dann ist nämlich $g \parallel \frac{G}{n} \frac{G_c^\infty}{n}$. Um in diesem Falle den Teilungspunkt O_1 zu erhalten, machen wir auf e_c^∞ in der Richtung nach F_c^∞ die Strecke $\frac{G_c^\infty}{n} Q = \frac{G_c^\infty}{n} \frac{O_0}{n}$ und $F_c^\infty O_1 = n \cdot F_c^\infty Q$. Be findet sich auch O_1 außerhalb der Zeichenfläche, so ermitteln wir den reduzierten Teilungspunkt $\frac{O_1}{n}$ zufolge der Gleichung:

$$F_c^\infty \frac{O_1}{n} = F_c^\infty G_c^\infty - \frac{O_1}{n} G_c^\infty = n \cdot F_c^\infty \frac{G_c^\infty}{n} - \frac{O_0}{n} \frac{G_c^\infty}{n}.$$

174. Weitere Aufgaben über Geraden und Ebenen. Wir beginnen mit einigen Aufgaben, die projektiver Natur, d. h. von Maßbeziehungen völlig frei sind. Zu ihrer Lösung ist die Kenntnis des Projektionszentrums nicht erforderlich.

1. Aufgabe. Die Schnittlinie g der Ebenen $E (e, e_c^\infty)$ und $\Phi (f, f_c^\infty)$ zu konstruieren. Die Spurlinien e und f treffen sich im Spurpunkte G von g ; ebenso ist der Fluchtpunkt $G_c^\infty = e_c^\infty \times f_c^\infty$.

Ist einer dieser Punkte un erreichbar, so schneide man die beiden Ebenen mit einer geeigneten Hilfsebene $\Sigma (s, s_c^\infty)$. Dann geht g durch den Schnittpunkt der Geraden $E \times \Sigma$ und $\Phi \times \Sigma$.

2. Aufgabe. Den Schnittpunkt P der Geraden $g (G, G_c^\infty)$ mit der Ebene $E (e, e_c^\infty)$ zu konstruieren. Man lege durch g eine beliebige Hilfsebene $\Phi (f, f_c^\infty)$ und bestimme die Schnittlinie i von E und Φ ; dann ist $P = g \times i$.

3. Aufgabe. Durch den Punkt $P (P_c)$ der Geraden $g (G, G_c^\infty)$ zu einer anderen Geraden $h (H, H_c^\infty)$ eine Parallele i zu ziehen. Der Fluchtpunkt von i fällt mit H_c^∞ zusammen, also ist $i_c = P_c H_c^\infty$. Da ferner g und i sich schneiden, so liegt der Spurpunkt J von i auf der Parallelen durch G zu $G_c^\infty H_c^\infty$.

4. Aufgabe. Die Verbindungslinie m der Punkte P und Q zu bestimmen, die bezw. auf den Geraden $g (G, G_c^\infty)$ und $h (H, H_c^\infty)$ gegeben sind. Auf der Bildgeraden $m_c = P_c Q_c$ muß noch der Spurpunkt M , sowie der Fluchtpunkt M_c^∞ ermittelt werden. Die Gerade m liegt nun in der Ebene $E = (P, h)$, deren Spur- und Fluchtlinie wir konstruieren, indem wir durch P zu h die Parallele i ziehen. Bestimmen wir von i den Spurpunkt J wie in der vorigen Aufgabe, so ist $e = HJ$, und e_c^∞ geht durch $H_c^\infty \parallel e$. Dann sind M und M_c^∞ die Schnittpunkte von m_c bezw. mit e und e_c^∞ .

175. Bei den folgenden Aufgaben metrischen Inhaltes ist das Projektionszentrum O immer durch den Distanzkreis d um A gegeben.

1. Aufgabe. Den Winkel α zweier (sich schneidenden oder windschiefen) Geraden $g (G, G_c^\infty)$ und $h (H, H_c^\infty)$ zu bestimmen. Da auch die Strahlen OG_c^∞ und OH_c^∞ den Winkel α einschließen, so finden wir seine wahre Größe durch Umlegung des Dreiecks $G_c^\infty O H_c^\infty$ in $\Pi (AF_c^\infty \perp G_c^\infty H_c^\infty, A O^0 \parallel G_c^\infty H_c^\infty$ bis $d, F_c^\infty O_0 = F_c^\infty O^0, \angle G_c^\infty O_0 H_c^\infty = \alpha)$.

2. Aufgabe. Im Punkte P der Ebene $E (e, e_c^\infty)$, dessen Bild P_c gegeben ist, ein Lot von gegebener Länge l zu errichten. Der gemeinsame Fluchtpunkt N_c^∞ aller Normalen zu E ist der Schnittpunkt von Π mit dem Lot in O zur Ebene (O, e_c^∞) . Die senkrechte Projektion dieses Lotes auf Π geht durch $A \perp e_c^\infty$ und trifft e_c^∞ im Hauptfluchtpunkte F_c^∞ von E . Die Punkte $F_c^\infty, O, N_c^\infty$ bilden demnach ein bei O rechtwinkliges Dreieck mit dem Höhenfußpunkt A , und wir erhalten den Punkt N_c^∞ , indem wir das erwähnte Dreieck in Π umgelegt aufzeichnen. Wir ziehen also $A O^0 \perp AF_c^\infty$ bis d und $O^0 N_c^\infty \perp O^0 F_c^\infty$ bis AF_c^∞ . — Die Gerade $P_c N_c^\infty$ ist das Bild n_c der unbegrenzten Geraden n , die in P auf E senkrecht steht. Um ihren Spurpunkt N zu ermitteln, ziehen wir durch P irgend eine in E liegende

Gerade, z. B. die Falllinie f , die F_c^∞ zum Fluchtpunkt, mithin den Schnittpunkt F von $P_c F_c^\infty$ mit e zum Spurpunkt hat. Dann liegt N auf der Parallelen durch F zu $F_c^\infty N_c^\infty$. Nunmehr erfolgt das Abtragen der gegebenen Länge l nach der Methode des Teilungspunktes: Wir machen auf $F_c^\infty N_c^\infty$ die Strecke $N_c^\infty O_1 = N_c^\infty O$, d. h. $= N_c^\infty O^0$, projizieren P_c von O_1 aus nach P_1 auf FN und tragen die Länge l von P_1 aus (in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne) auf FN ab. Ziehen wir von dem so erhaltenen Punkte Q_1 eine Gerade nach O_1 , die n_c in Q_c schneidet, so ist $P_c Q_c$ das Bild des gesuchten Lotes.

IV. Darstellung krummer Linien und Flächen.

176. Darstellung des Kreises. Die Zentralprojektion des Kreises ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Kreis mit der Verschwindungslinie seiner Ebene keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat.

Aufgabe. Die Zentralprojektion k_c des Kreises k zu konstruieren, der durch seine Ebene E (e , e_c^∞) und seine Umlegung k_0 um e in Π gegeben ist. Wir ziehen zunächst $AF_c^\infty \perp e_c^\infty$ und bestimmen in bekannter Weise die Umlegung O_0 des Projektionszentrums O um e_c^∞ , sowie die umgelegte Verschwindungslinie e_0^∞ von E .

Erster Fall: k_0 schneidet e_0^∞ nicht; k_c ist also eine Ellipse. Erste Lösung: Sei M_0 der Mittelpunkt von k_0 , $B_0 C_0$ der auf e senkrechte Kreisdurchmesser, S sein Schnittpunkt mit e , so entsprechen den Punkten B_0 und C_0 im Bilde die Schnittpunkte B_c und C_c von SF_c^∞ mit $O_0 B_0$ und $O_0 C_0$. Genauer konstruieren wir B_c mit Hilfe des Teilungspunktes O_1 der Geraden MS hinsichtlich der Ebene E : Machen wir auf e_c^∞ und e bzw. die Strecken $F_c^\infty O_1 = F_c^\infty O_0$, $SB_1 = SB_0$, so geht $O_1 B_1$ durch B_c . Da die Tangenten in entsprechenden Punkten von k_0 und k_c sich auf der Kollineationsachse e schneiden, so sind die Ellipsentangenten in B_c und C_c $\parallel e$; die Strecke $B_c C_c$ ist also ein Durchmesser von k_c , und der zu ihm konjugierte Durchmesser $D_c E_c$ geht durch den Mittelpunkt N_c von $B_c C_c \parallel e$. Um die Punkte D_c und E_c zu finden, ermitteln wir auf $B_0 C_0$ den Punkt N_0 (am sichersten wieder mittels des Teilungspunktes O_1) und ziehen durch ihn in k_0 die Sehne $D_0 E_0 \parallel e$, sowie die Geraden $O_0 D_0$ und $O_0 E_0$. Hierdurch ist k_c bestimmt. — Die Tangenten aus O_0 an k_0 berühren auch k_c ¹⁾.

177. Zweite Lösung. Wir bezeichnen wie vorhin mit S die Spur, mit F_c^∞ den Fluchtpunkt des auf e senkrechten Kreisdurchmessers BC , ferner mit GH den zu e parallelen Durchmesser, mit O_1

¹⁾ Um über k als Grundkreis einen geraden Kreiskegel von gegebener Höhe h zu konstruieren, errichten wir in M zu E ein Lot $MP = h$ (vergl. 175). Die scheinbaren Umrisslinien des Kegels sind die Tangenten aus P_c an k_c . Wir zeichnen sie, ohne die Ellipse k_c zu benutzen, indem wir P_c als Bild eines Punktes in E auffassen, dessen Umlegung P_0 wir ermitteln. (P_0 liegt auf $O_0 P_c$, und die Geraden $M_c P_c$ und $M_0 P_0$ schneiden sich auf e .) Dann entsprechen den Tangenten aus P_0 an k_0 die Tangenten aus P_c an k_c .

und O_2 die Fluchtpunkte derjenigen Geraden von E , die mit e Winkel von 45° einschließen ($F_c^\infty O_1 = F_c^\infty O_2 = F_c^\infty O$). Denken wir uns dem Kreise ein Quadrat umgeschrieben, dessen Seiten zu GH und BC parallel sind, und machen auf e die Strecken SQ und SR gleich dem Radius von k , sowie $ST = SU = SM_0$, so sind QF_c^∞ und RF_c^∞ die Bilder der auf e senkrechten Quadratseiten, TO_2 und UO_1 die Bilder der Diagonalen, und wir erhalten als Bild des Quadrates ein Parallelogramm, dessen Seiten die Ellipse k_c in B_c, C_c, G_c, H_c berühren; dabei geht $G_c H_c \parallel e$ durch den Schnittpunkt M_c von SF_c^∞, TO_2 und UO_1 .

Wir denken uns weiter dem Kreise k ein zweites Quadrat umgeschrieben, dessen Seiten zu den Diagonalen des ersten parallel sind, und bezeichnen mit V und W die auf GH liegenden Eckpunkte. Dann verhält sich $MG : MV = 1 : \sqrt{2}$; also stehen auch die entsprechenden Bildstrecken in demselben Verhältnis. Machen wir daher auf $G_c H_c$ die Strecken $M_c V_c = M_c W_c = M_c G_c \cdot \sqrt{2}$, so sind die Verbindungslinien von V_c und W_c mit O_1 und O_2 abermals vier Tangenten von k_c , und die betreffenden Berührungspunkte liegen auf TO_2 und UO_1 .

Bei dieser Lösung ist die Umlegung k_0 des Kreises entbehrlich.

178. Zweiter Fall. Berührt k_0 die umgelegte Verschwindungslinie e_0^v in P_0^v , so ergibt sich als Bild eine Parabel k_c , deren Achse $\parallel O_0 P_0^v$ ist. Ziehen wir $O_0 T_0^v \perp O_0 P_0^v$ bis e_0^v und von T_0^v an k_0 die Tangente t_0 , so entspricht ihr die Scheiteltangente t_c von k_c , die sich mit t_0 auf e schneidet. Dem Berührungspunkte J_0 von t_0 ist der Scheitel J_c der Parabel zugeordnet.

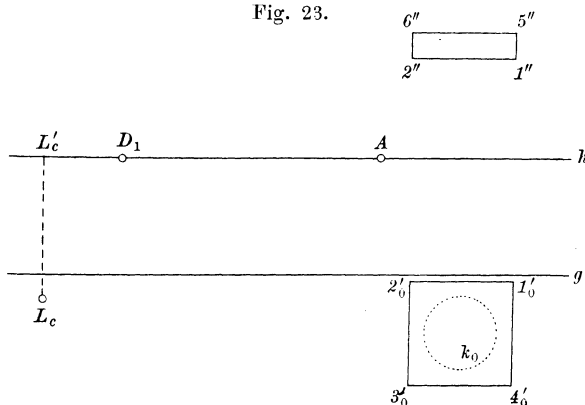
179. Dritter Fall. Schneidet k_0 die Gerade e_0^v in P_0^v und Q_0^v , so ist k_c eine Hyperbel. Den Kreistangenten p_0 und q_0 in P_0^v und Q_0^v entsprechen die Asymptoten $p_c \parallel O_0 P_0^v$ und $q_c \parallel O_0 Q_0^v$.

180. Darstellung der Kugel. Der Kugelmittelpunkt M liege hinter der Ebene Π und sei bestimmt durch seine senkrechte Projektion M_1 auf Π und seine Entfernung t von dieser Ebene; überdies sei der Radius r der Kugel gegeben. Der vom Projektionszentrum O ausgehende Tangentenkegel berührt die Kugel in einem Kreise u und schneidet Π in einem Kegelschnitt u_c , dem scheinbaren Umriß der Kugel. Die Brennpunkte von u_c sind die Projektionen der Endpunkte F und G des auf MM_1 liegenden Kugeldurchmessers (87). Legen wir die durch MM_1 und OA gehende Ebene, die mit der Kugel einen Hauptkreis k gemein hat, um AM_1 in die Bildebene um, so gelangen M, F, G, k, O bzw. nach M_0, F_0, G_0, k_0, O_0 ; dabei ist $M_1 M_0 \perp AM_1$ und $= t, AO_0 \perp AM_1$ und gleich der Distanz. Dann erhalten wir die Brennpunkte F_c und G_c , sowie die Endpunkte der Hauptachse von u_c als die Schnittpunkte von AM_1 mit $O_0 F_0$ und $O_0 G_0$, sowie mit den Tangenten aus O_0 an k_0 .

Alle Kugeln, die dem von O an die gegebene Kugel gelegten Tangentenkegel eingeschrieben sind, haben denselben scheinbaren Umriß u_c . Ist also von der Originalkugel das Bild i_c des zu Π parallelen Hauptkreises i bekannt, so finden wir u_c als Umriß einer Hilfskugel mit dem Hauptkreise i_c . Indem wir die soeben ausgeführte

182. Perspektive eines auf der Grundrißebene Π_1 stehenden geraden Kreiszylinders mit quadratischer Deckplatte nebst Schattenkonstruktion für Parallelbeleuchtung. In Fig. 23 bedeutet wie früher A den Hauptpunkt, D_1 einen Distanzpunkt, g die Grundlinie, $h = AD_1$ den Horizont, k_0 die Umlegung des in der hinteren Π_1 liegenden Grundkreises k des Zylinders. Die quadratische Platte ist durch ihren umgelegten Grundriß und ihre Aufrißprojektion auf Π gegeben; wie die Figur zeigt, ist die rechteckige Fläche $1\ 2\ 6\ 5 \parallel \Pi$. Wir konstruieren zunächst nach 176 oder 177 das Bild k_c von k und hierauf in analoger Weise das Bild i_c des oberen Grenzkreises i . Dabei tritt an Stelle von g die Gerade $1''\ 2''$ als Spur der oberen Grenzebene, und entsprechende Punkte von k_c und i_c liegen in Loten zu g . Die scheinbaren Umrißlinien t_c und u_c des Zylinders sind die gemeinsamen vertikalen Tangenten der Ellipsen k_c und i_c ; wir konstruieren sie am genauesten, ohne k_c zu benutzen, auf

Fig. 23.



Grund der kollinearen Beziehung zwischen k_c und k_0 . Ist O_0 das umgelegte Projektionszentrum, O'_0 eine umgelegte Grundrißprojektion, also Abst. $(O'_0, g) = O_0 A = A D_1$, so geht durch O'_0 die umgelegte Verschwindungslinie von Π_1 , und O'_0 ist folglich der umgelegte Verschwindungspunkt aller Originalgeraden, deren Bilder vertikal sind. Ziehen wir daher aus O'_0 an k_0 die Tangenten t_0 und u_0 , so entsprechen ihnen im Bilde die gesuchten Umrißlinien, und diese gehen also durch die Schnittpunkte von t_0 und u_0 mit g .

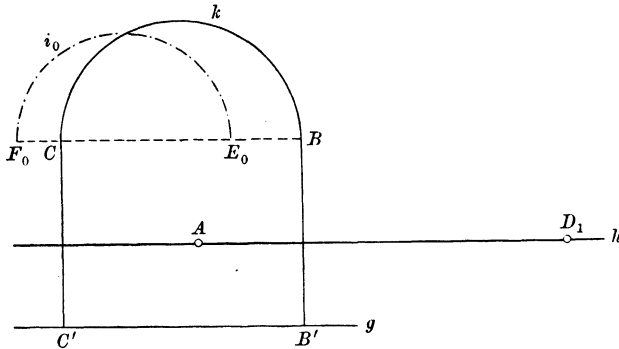
Bezeichnet L_c den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen, L'_c seine senkrechte Projektion auf h , so gehen nach L'_c als Fluchtpunkt die Bilder aller Schatten, die von den Zylindermantellinien auf Π_1 geworfen werden. Die Grenzlinien dieses Schlagschattens sind also die Tangenten v_c und w_c aus L'_c an k_c . Wir bestimmen sie mit Hilfe der entsprechenden Tangenten v_0 und w_0 von k_0 , die zu $O_0 L'_c$ parallel sind. Ist V_0 der Berührungspunkt von v_0 und k_0 , so liefert die Gerade $O_0 V_0$ auf v_c den entsprechenden Berührungspunkt V_c und damit einen Punkt der Eigenschattengrenze des Zylinders.

Um den elliptischen Schatten zu konstruieren, den die Kante $1\ 2$ der Deckplatte auf den Zylinder wirft, wählen wir auf $1\ 2$ eine Reihe

von Punkten $P, Q \dots$ und ermitteln für die zugehörigen Lichtstrahlen die Schnittpunkte $P^*, Q^* \dots$ mit dem Zylinder. Ziehen wir $P_c P'_c \perp g_c$ bis $1_c 2_c$, so ist die Gerade $P'_c L'_c$ das Bild der Grundrißprojektion des durch P gehenden Lichtstrahles; sie schneidet also k_c in P'_c , dem perspektiven Grundriß von P^* . Genauer erhalten wir P'_c mit Hilfe des Kreises k_0 : Wir bestimmen P'_0 als Schnittpunkt von $1'_0 2'_0$ mit $O_0 P'_c$, ziehen $P'_0 P''_0 \parallel O_0 L'_c$ bis k_0 und projizieren den Punkt P''_0 aus O_0 auf $P'_c L'_c$. — In derselben Weise ergibt sich der Schatten, den der Zylinder von der Kante 14 empfängt.

183. Durchdringung zweier Tonnengewölbe. In Fig. 24 ist das Projektionszentrum durch Hauptpunkt A und Distanzpunkt D_1 , die Bodenebene Π_1 durch die Grundlinie g gegeben. Die Wölbflächen sind zwei halbe gerade Kreiszylinder mit horizontalen, sich rechtwinklig schneidenden Achsen. Der größere besitzt als Leitkurve den in Π liegenden Halbkreis k über dem horizontalen Durchmesser BC , der

Fig. 24.



kleinere den Halbkreis i , dessen Ebene E auf Π senkrecht steht und die vertikale Gerade BB' zur Spurlinie hat. Wir bestimmen i durch seine Umlegung i_0 in Π und bezeichnen mit $E_0 F_0$ die Umlegung des auf Π senkrechten Durchmessers; im Bilde ist also $E_c = AB \times E_0 D_1$. Der scheinbare Umriß u_c des kleineren Zylinders ist die horizontale Tangente der nicht gezeichneten Halbellipse i_c . Nun sind i_0 und i perspektiv kollinear für D_1 als Zentrum, BB' als Achse und die Vertikale durch A als Fluchtlinie; machen wir also auf dem Horizont h die Strecke $D_1 R_0$ gleich dem Abstände des Punktes A von BB' , so ist R_0 der Verschwindungspunkt der entsprechenden Tangente u_0 von i_0 , und dann geht u_c durch den Schnittpunkt von u_0 mit BB' . — Der von den Wölbflächen bedeckte Raum ist seitlich durch vertikale Ebenen begrenzt, die durch die Anfangsmantellinien der Zylinder gehen und bis Π_1 reichen, und hinten durch eine Ebene $\parallel \Pi$, deren Abstand von $F = BE$ sein möge.

Um die Durchdringungskurve zu konstruieren, schneiden wir beide Zylinder durch eine Schar horizontaler Hilfsebenen (96). Sei s die Spur einer solchen Hilfsebene Σ , T ihr Schnittpunkt mit BB' , so ist AT das Bild der Schnittlinie t von Σ mit E . Die Gerade s trifft den

Kreis k in M und N , den Anfangspunkten der Mantellinien, welche Σ aus dem größeren Zylinder schneidet. Ebenso hat t mit i zwei Punkte P und Q gemein; ihre Umlegungen P_0 und Q_0 sind die Schnittpunkte von i_0 mit s , und die zugehörigen Bildpunkte P_c und Q_c werden daher gefunden, indem wir P_0 und Q_0 aus D_1 auf AT projizieren. Die Horizontalen durch P_c und Q_c sind die Bilder der in Σ liegenden Mantellinien des kleineren Zylinders; sie treffen MA und NA in vier Punkten des Bildes der Durchdringungskurve. — Man bestimme insbesondere die Punkte der Durchdringungskurve auf der Umrißlinie u und auf der höchsten Mantellinie des kleineren Zylinders. In E und F hat die Kurve vertikale Tangenten.

V. Verlegung des Projektionszentrums.

184. Sei O_1 das ursprüngliche Projektionszentrum, A_1 der zugehörige Hauptpunkt, G die Spur, G_1^∞ der Fluchtpunkt einer Originalgeraden g , also $g_1 = G G_1^\infty$ das Bild von g , ferner P_1 das Bild eines Punktes P von g ; man soll die Projektionen g_2 und P_2 von g und P aus irgend einem anderen Punkte O_2 ermitteln, der durch seine senkrechte Projektion A_2 auf die Bildebene Π und seine Entfernung von dieser gegeben ist. Wir ermitteln zunächst den Schnittpunkt S der Geraden $O_1 O_2$ mit Π , indem wir die Ebene $O_1 A_1 O_2 A_2$ um $A_1 A_2$ in Π umlegen. Der neue Fluchtpunkt G_2^∞ von g liegt auf der Parallelen durch O_2 zu $O_1 G_1^\infty$; wir erhalten ihn daher als Schnittpunkt von $G_1^\infty S$ mit der Parallelen durch A_2 zu $A_1 G_1^\infty$. Dann ist $g_2 = G G_2^\infty$ das gesuchte Bild von g . Der Punkt P_2 liegt auf der Geraden SP_1 , der Spurlinie der Ebene $O_1 O_2 P$.

Liegt O_2 auf $O_1 A_1$, so fällt S mit A_1 zusammen, und der Punkt G_2^∞ teilt $A_1 G_1^\infty$ in demselben Verhältnis, wie O_2 die Strecke $A_1 O_1$.

Ist $O_1 O_2 \parallel \Pi$, so ist $G_1^\infty G_2^\infty \nparallel A_1 A_2$ und $P_1 P_2 \parallel A_1 A_2$. Dies kommt zur Anwendung bei der Konstruktion stereoskopischer Bilder.

Anhang.

Grundzüge der Reliefperspektive.

185. Um von einem räumlichen Gebilde in gesetzmäßiger Weise eine räumliche Abbildung herzustellen, wählen wir im Raume einen Punkt O und zwei parallele (vertikale) Ebenen Π und Π_1^∞ und treffen die folgenden Festsetzungen:

1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in Original- und Bildfigur sollen durch O gehen.
2. Jeder Punkt der Ebene Π soll sich selbst entsprechen.

3. Das Bild jedes unendlich fernen Punktes soll sich in der Ebene Π_1^∞ befinden.
4. Das Bild jeder geraden Linie soll wieder eine Gerade sein.

Dann ist zu jeder Originalgeraden g die Bildgerade g_1 eindeutig bestimmt, denn diese geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π und durch das Bild des unendlich fernen Punktes von g , d. h. den Schnittpunkt G_1^∞ von Π_1^∞ mit der Parallelen durch O zu g . — Das Bild P_1 eines beliebigen Raumpunktes P ergibt sich als Schnittpunkt des Strahles OP mit dem Bilde irgend einer durch P gehenden Geraden.

Das auf solche Weise konstruierte Bild einer Raumfigur wird das Relief derselben genannt. Beide Figuren heißen im allgemeinsten Sinne perspektiv kollinear. Der Punkt O wird als Kollineationszentrum (Gesichtspunkt), die Ebene Π als Kollineationsebene, die Ebene Π_1^∞ als Fluchtebene bezeichnet. Wir nennen ferner G den Spurpunkt, G_1^∞ den Fluchtpunkt der Geraden g und verstehen unter Hauptfluchtpunkt den Fußpunkt A_1^∞ des Lotes von O auf Π_1^∞ , also den Fluchtpunkt aller Normalen zu Π .

Durch unser Abbildungsverfahren wird der unendliche Originalraum, der von O aus gesehen sich hinter der Ebene Π befindet, in einem Raume von begrenzter Tiefenausdehnung — zwischen Π und Π_1^∞ — dargestellt. Die Entfernung der Ebenen Π und Π_1^∞ heißt die Tiefe des Reliefs. Wird diese gleich Null, so verwandelt sich das Relief in eine gewöhnliche Zentralprojektion auf die Ebene Π .

186. Dem unendlich fernen Punkte der Bildgeraden g_1 entspricht als Originalpunkt der Schnittpunkt G^v von g mit der Parallelen durch O zu g_1 ; wir bezeichnen ihn wieder, als den Verschwindungspunkt von g . Wegen $G^v G = O G_1^\infty$ ist auch $\text{Abst. } (G^v, \Pi) = \text{Abst. } (O, \Pi_1^\infty)$, d. h. konstant für alle Originalgeraden. Demnach liegen die Verschwindungspunkte aller Geraden in einer zu Π parallelen Ebene, der Verschwindungsebene Π^v , und es ist $\text{Abst. } (\Pi^v, \Pi) = \text{Abst. } (O, \Pi_1^\infty)$.

187. Das Relief E_1 einer Ebene E ist wieder eine Ebene, denn allen Geraden in E entsprechen Bildgeraden, die sich sämtlich schneiden. Bestimmen wir von E die Spurlinie $e = \Pi \times E$, sowie die Fluchtlinie e_1^∞ , d. h. die Schnittlinie von Π_1^∞ mit der Parallelebene durch O zu E , so ist $E_1 = (e, e_1^\infty)$. Die Ebene E schneidet Π^v in der Verschwindungslinie e^v , deren Verbindungsebene mit O zu E_1 parallel ist.

Entsprechende Figuren in E und E_1 sind perspektiv kollinear für O als Zentrum, e als Achse und e_1^∞ als Fluchtlinie. — Ist $E \parallel \Pi$, so gilt dasselbe von E_1 , und entsprechende Figuren beider Ebenen sind einander ähnlich.

Die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen geht durch A_1^∞ und heißt der Horizont des Reliefs.

Um das Relief eines Gegenstandes zu konstruieren, bedienen wir uns der Darstellung in Grund- und Aufriß; dabei stellen wir die Ebene Π senkrecht zur Projektionsachse x .

188. Abbildung der Kugel. Da jeder ebene Schnitt der Kugel K in einen Kegelschnitt übergeht, so erhalten wir als Relief K_1 eine Fläche zweiter Ordnung ohne gerade Linien, und zwar ein Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die Kugel mit der Verschwindungsebene Π^v keinen Punkt gemein hat, oder sie in einem Punkte berührt, oder in einem Kreise schneidet. Insbesondere entsteht eine Umdrehungsfläche zweiter Ordnung, wenn der Kugelmittelpunkt auf der Geraden OA_1^∞ liegt.

Der Tangentenkegel an K_1 aus irgend einem Punkte L_1 ist das Relief des Tangentenkegels aus dem entsprechenden Punkte L an K , und da dieser die Kugel in einem Kreise s berührt, so folgt: Die Eigenschattengrenze s_1 der Fläche zweiter Ordnung K_1 ist ein Kegelschnitt. — Ist L_1 unendlich fern und K_1 ein elliptisches Paraboloid, so liegt L in der Ebene Π^v , die in diesem Falle von K in einem Punkte P berührt wird. Dann berührt auch der Kreis s die Ebene Π^v in P , mithin ist die Eigenschattengrenze s_1 des elliptischen Paraboloids bei Parallelbeleuchtung eine Parabel.

189. Spezielle Fälle der Reliefperspektive. a) Ist O unendlich fern, so entspricht jedem unendlich fernen Originalpunkte ein unendlich fernes Bild; die Bilder paralleler Geraden sind also parallel, und die Ebenen Π_1^x und Π^v fallen zusammen mit der unendlich fernen Ebene des Raumes. Wir bezeichnen die Beziehung zwischen Original- und Bildfigur in diesem Falle als (räumliche) Affinität in perspektiver Lage.

b) Liegt die Ebene Π unendlich fern, so entspricht jeder Originalgeraden eine parallele Bildgerade und entsprechende Strecken stehen in konstantem Verhältnis. Die Ebenen Π_1^x und Π^v fallen mit der unendlich fernen Π zusammen: Ähnlichkeit in perspektiver Lage.

c) Ist sowohl O als auch Π unendlich fern, so sind Original- und Bildfigur kongruent und parallel.

